Fraktale Teppiche

Ein Schülerworkshop

Ernestina Dittrich

Universität Karlsruhe (TH)
Abteilung für Didaktik der Mathematik

Entstehungsgeschichte

- 2007 / 2008 Girls‘ Day
- SS 2008 Fachdidaktische Übungen – Projektorientierter Unterricht
- 2009 Workshop im Schülelabor

Didaktisches Konzept

- Erster Entwurf durch Frau Dr. Lenhardt
- Ausarbeitung durch Lehramtsstudierende
- Erprobung bei einem Workshop im Fachdidaktikseminar mit Schülern der Klasse 12

Inhalte des Workshops

- Begriff der Selbstähnlichkeit und Fraktale
- Beispiele von Fraktalen
  - Koch-Kurve
  - Sierpinski-Dreieck und -Pyramide
  - Sierpinski-Teppich
- Abbildungsvorschrift für Fraktalteppiche
- Fraktale Dimension
- Ein- und Zweistufige Fraktalteppiche mit Maple

Fraktale und Selbstähnlichkeit

Fraktal: ein Begriff von Benoit Mandelbrot (1975)

fractus (lat.) = gebrochen



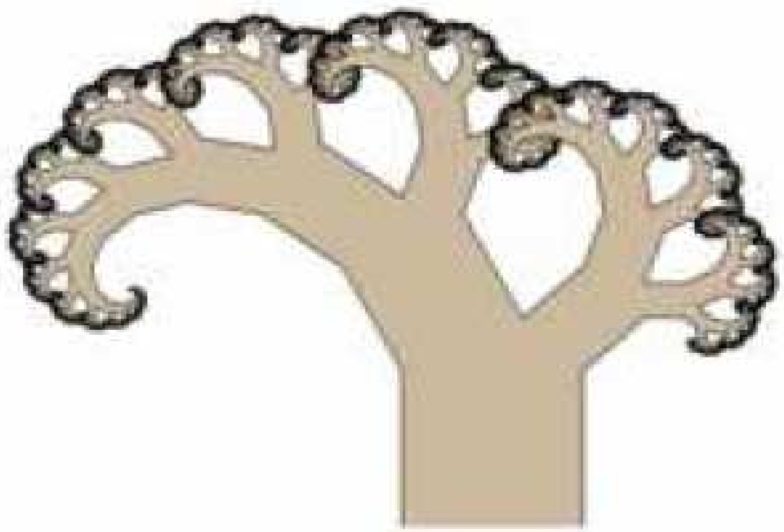

Die Eigenschaft, bei Vergrößerung eines Ausschnitts wieder dieselbe oder ähnliche Struktur zu sehen, heißt **Selbstähnlichkeit**.

Erzeugen von Fraktalen

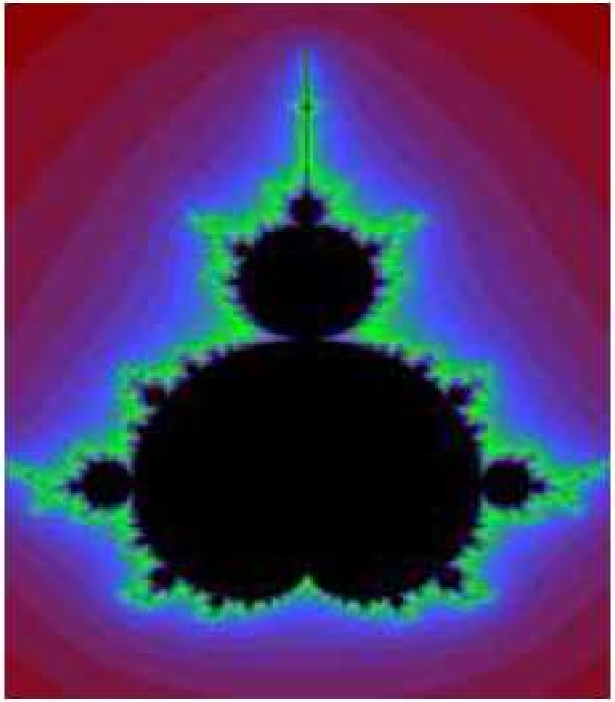
Fraktale sind selbstähniche Gebilde.

Fraktale erzeugt man, indem dieselbe Vorschrift immer wieder angewandt wird.

Berühmte Fraktale:

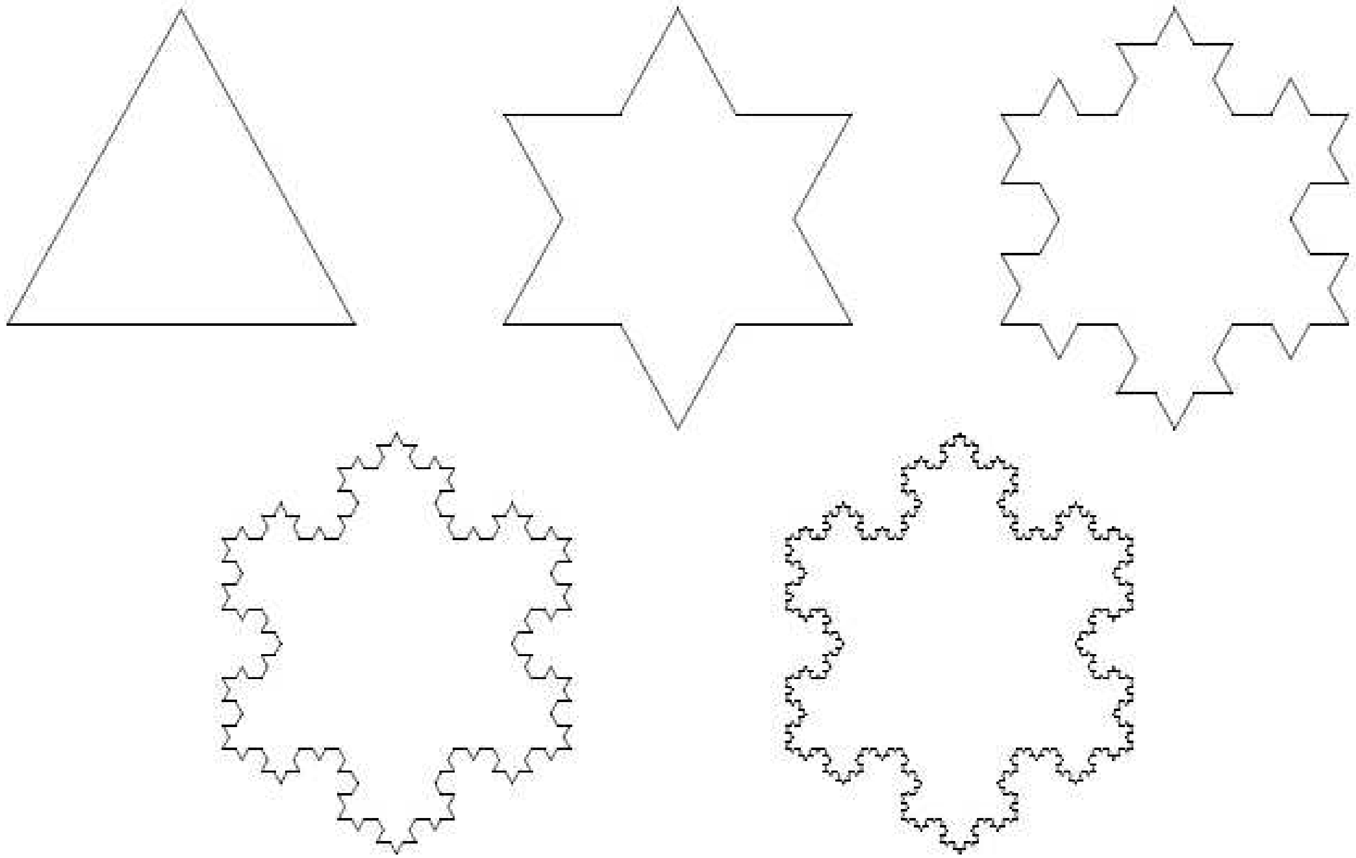


Pythagoras-Baum

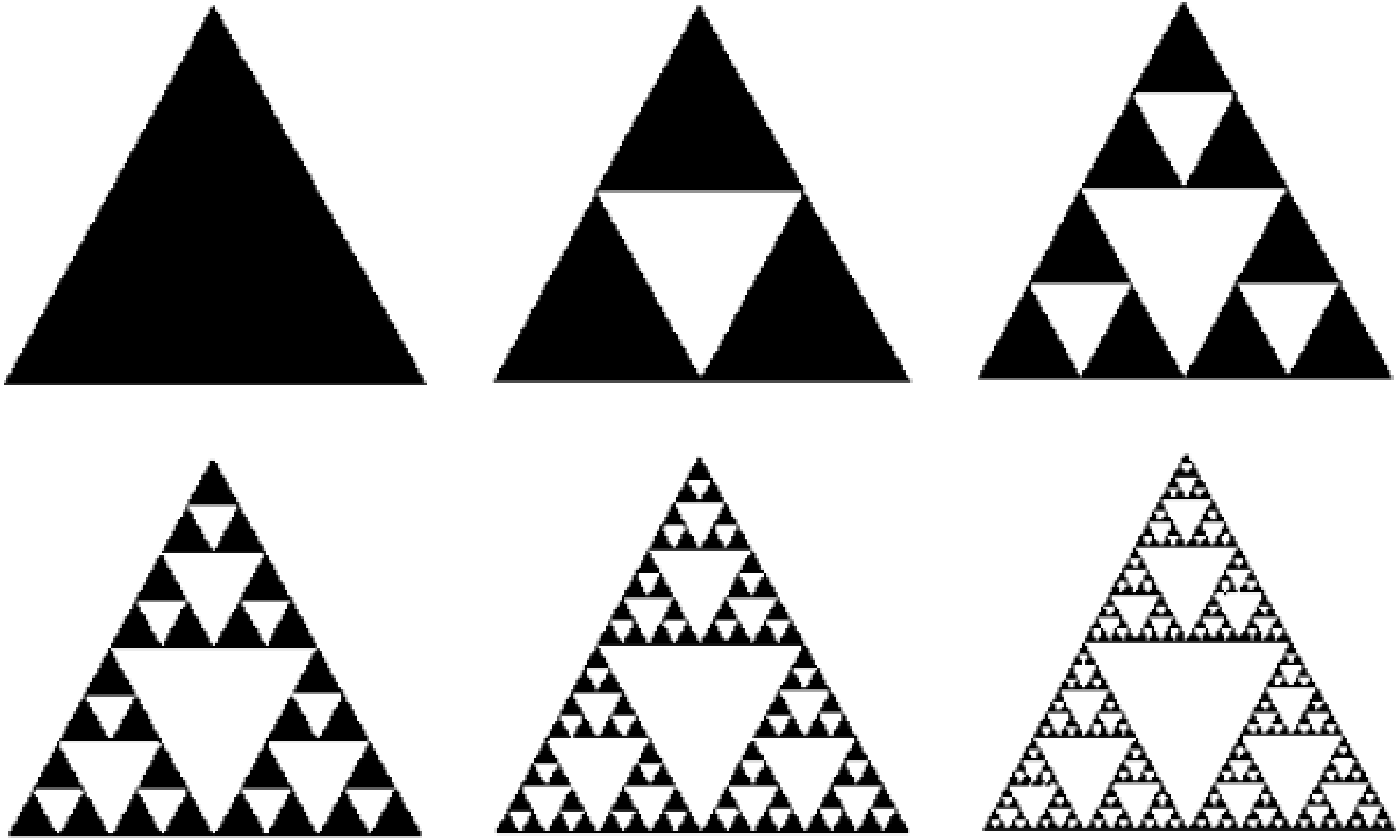


Mandelbrot-Menge
(Apfelmännchen)

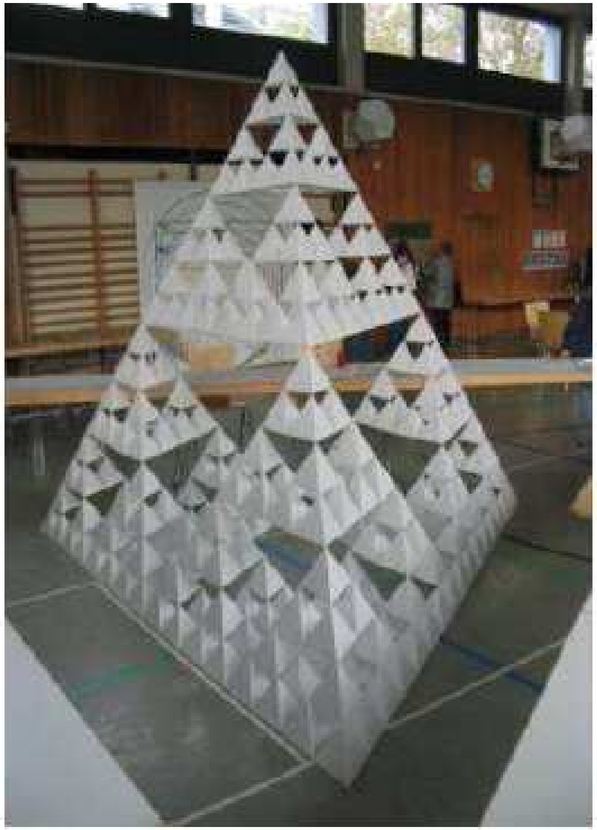
Koch-Schneekurve



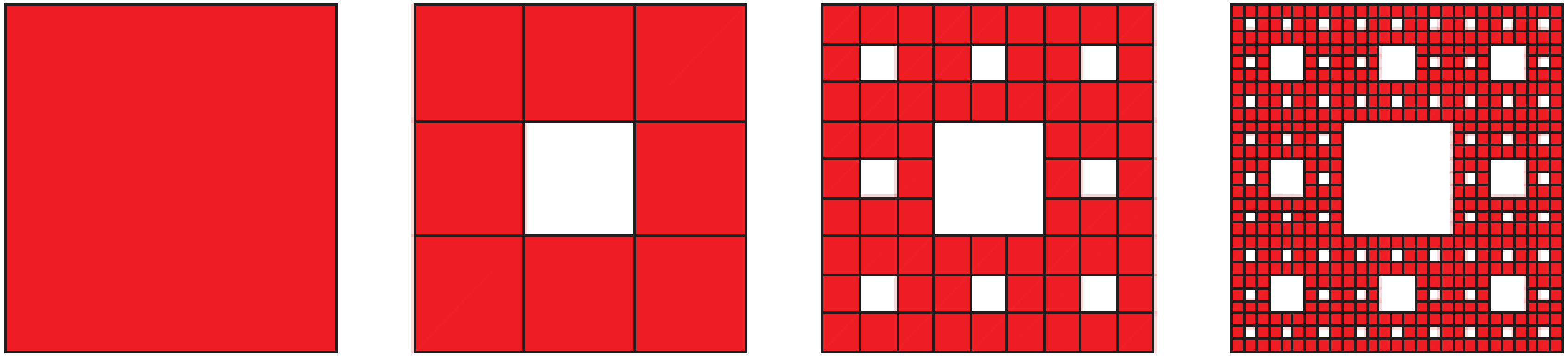
Sierpinski-Dreieck



Sierpinski-Pyramide



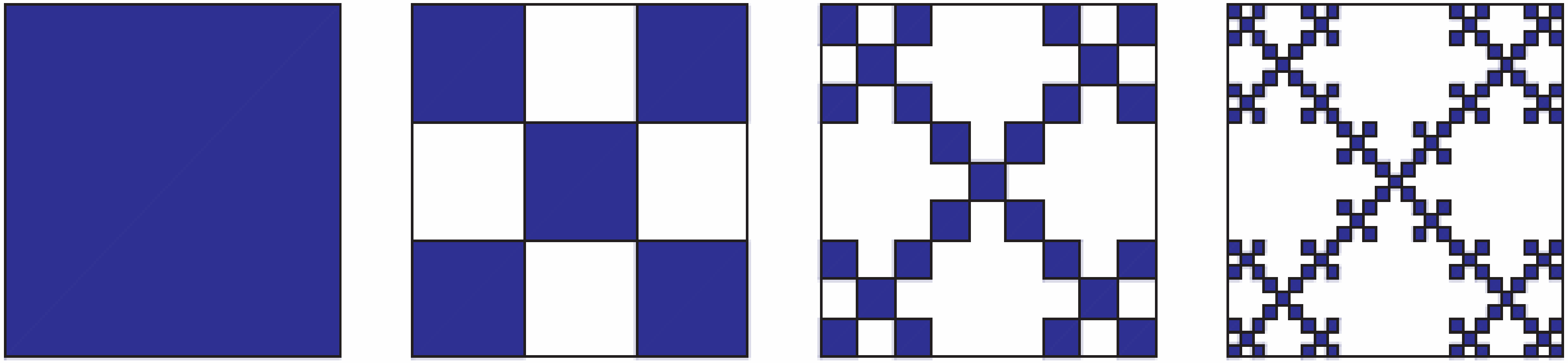
Sierpinski-Teppich und die Abbildungsvorschrift



Erzeugen des Fraktalteppichs mit einer Abbildungsvorschrift

$$A : 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fraktalteppiche und ihre Abbildungsvorschrift



$$A : 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Arbeitsblätter

Fraktale Dimension

Strecke	Dimension1	endliche Länge
Flächenstück	Dimension 2	endlicher Flächeninhalt F>0
Räumlicher Körper	Dimension 3	endliches Volumen V>0

Sind unsere Teppiche 1- oder 2-dimensional?

Oder etwas dazwischen?

Fraktale Dimension

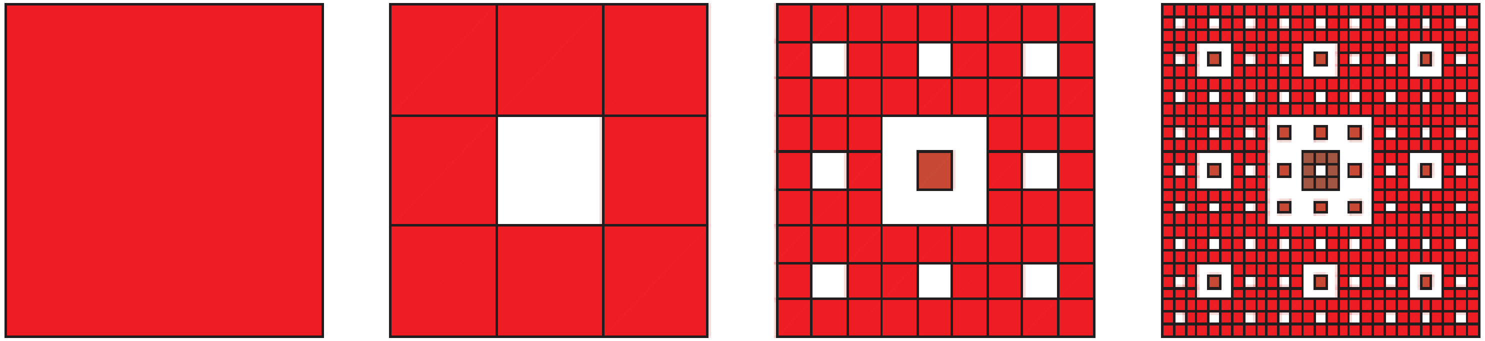
$$D = -\lim_{k\to\infty} \frac{\log(N_k)}{\log(L_k)}.$$

N_k : Anzahl der selbstähnlichen Teilchen im k-ten Schritt

L_k : Kantenlänge im k-ten Schritt

Zweistufige Fraktalteppiche

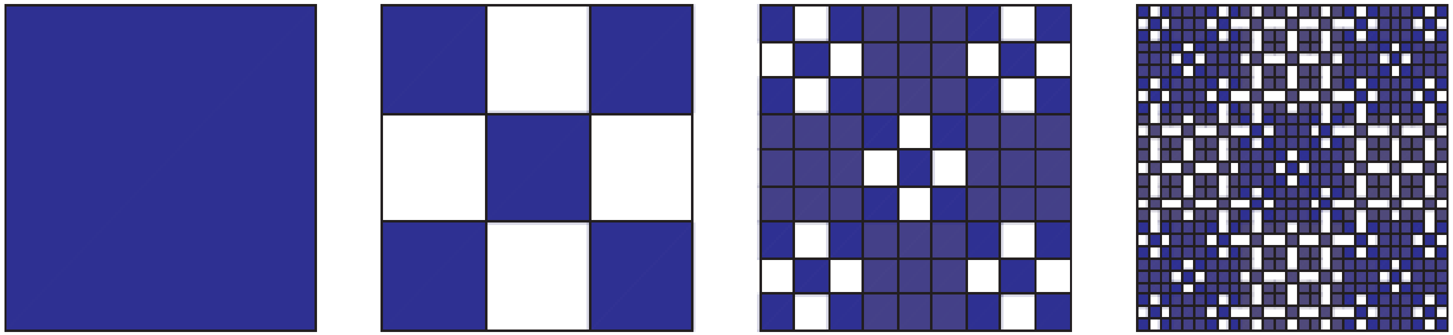
$$A : 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B : 0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Maple-Programm

Zweistufige Fraktalteppiche

$$A : 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B : 0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Gruppenarbeit

Fraktalteppiche und Kunst

Experimenta+ Karlsruhe 14.11.-20.12.2008