

# 1 Projektplanung

## 1.1 Übersicht

Das Projekt “Computeralgebra” gliedert sich in mehrere Phasen:

1. Aufgabenauswahl
2. Bearbeitung des Problems
3. Dokumentation der Lösung
4. Veröffentlichung und Vorstellung der Lösung

Die Aufgaben können einzeln oder in Teamarbeit bearbeitet werden. Bei Teamarbeit ist es wichtig, daß jeder Beteiligte seine entsprechende Arbeitsleistung hierfür erbringt.

Ziel des Projekts ist eine ansprechende Aufbereitung des Stoffes und ggf. Veröffentlichung desselben im Intranet.

## 1.2 Zeitplan

März	Auswahl des Themas anhand der Themenliste
April-Mai	Bearbeitung des Themas
Juni	Aufbereitung der Lösung
Juli	Veröffentlichung und Vorstellung der Lösung

## 1.3 Die einzelnen Arbeitsphasen

1. **Aufgabenauswahl**  
Die Themen werden vorgestellt, der Schwierigkeitsgrad klassifiziert und Lösungsstrategien vorbesprochen.
2. **Bearbeitung des Problems**  
In der Bearbeitungsphase werden die Themen eigenständig bearbeitet, in zumindest einem Teil der CA-Unterrichtsstunde besteht Gelegenheit, Fragen zum Thema zu klären bzw. Hilfestellung oder Tips zu erhalten.
3. **Aufbereitung der Lösung**  
Nach erfolgter Bearbeitung wird die Dokumentation realisiert. Diese umfaßt drei Teile: Problemstellung, Beschreibung der Problembearbeitung und Lösung. Genaueres siehe Teil 1.4 auf der nächsten Seite. Auch in dieser Phase kann bei Bedarf ein Teil der Unterrichtszeit zur Beratung verwendet werden.
4. **Veröffentlichung und Vorstellung der Problembearbeitung**  
Anschließend besteht Gelegenheit, die Arbeit zu veröffentlichen. Hierzu wird es im Intranet einen eigenen Bereich geben, in dem die Arbeiten zum Abruf abgelegt werden. Bei entsprechender Qualität können die Arbeiten auch ins Internet gegeben werden. Bei besonders gelungenen Arbeiten bzw. bei Interesse ist auch eine Vorstellung (z.B. referatsmäßig oder durch eine Ausstellung) der Arbeit möglich.

## 1.4 Form der Ausarbeitung

**Wichtig:** Um bei der Dokumentation nicht in Zeitnot zu kommen, sollte unbedingt spätestens gleich nach den Pfingstferien mit der Dokumentation begonnen werden!

1. **Problembeschreibung:** In kurzer Form werden die Problemstellung, wichtige Vorinformationen bzw. Annahmen und ggf. Anleitungen bzw. weitere Informationen dargestellt. Dieser Teil soll dem Außenstehenden einen ersten Überblick über die Fragestellungen geben und ihm das Hineindenken in das Problem ermöglichen. Die Problembeschreibung ist in der Form eines Arbeitsblatts gestaltet, das so aufbereitet ist, daß es im Intranet als Webseite lesbar ist (HTML-Format). Am Ende dieser Seite sind zwei Links zu finden (auf die beiden nachfolgenden Dokumentationssteile Lösungsweg und Lösung)
2. **Lösungsweg:** Überlegungen zur Lösungsfindung, aufgetretene Probleme, zusätzlich betrachtete Aspekte, Mängel in der Lösung ...  
Sinnvollerweise wird diese Ausarbeitung auch als HTML-Text erstellt. Falls dies zu viel Aufwand darstellen sollte, genügt auch ein entsprechend aufbereitetes Textdokument (z.B. im WORKS- oder WORD-Format; aber auch eine Darstellung in Maple ist nicht ausgeschlossen).  
Bei technischen Fragen hilft sicherlich das Intranet-Team mit nützlichen Tips!
3. **Lösung:** Schließlich soll die mathematische Lösung noch dargestellt werden. Hierfür bietet sich ein Maple-Worksheet mit ansprechender Darstellung des Lösungsgangs (Kommentare!) an. Durch Anklicken des entsprechenden Links im Aufgabenteil wird automatisch Maple gestartet und die Lösung dargestellt.

## 2 Projektaufgaben

Die nachfolgend genannten Themen sind absichtlich nicht dem Schwierigkeitsgrad nach sortiert, da jede Aufgabe durch Erweiterungen beliebig schwierig bzw. durch Vereinfachungen beliebig leicht gemacht werden kann. Es ist nur beabsichtigt, hierdurch das grobe Thema vorzugeben. Was daraus gemacht wird, liegt in der Hand des Einzelnen!

Nach dem sehr frühen Auffinden einer Lösung sollte man sich also zusätzliche Fragestellungen überlegen und diese in die Arbeit und Dokumentation einbeziehen. Genauso ist es natürlich erwünscht, noch offen gebliebene Fragestellungen zu formulieren, damit dem Leser die Möglichkeit des Weiterforschens eröffnet wird.

1. **Parabolspiegel** Die mathematischen Eigenschaften des Parabolspiegels werden untersucht (Reflexionsstrahlen, Brennpunkt). Verwandte Kurven (Ellipsen und Hyperbeln) bieten sich für weitergehende Untersuchungen an.
2. **Ellipse** Dem vorhergehenden Thema eng verwandt sind die Ellipsen. Nach der Recherche in einschlägiger Literatur sollen mit Maple die entsprechenden Definitionen einer Ellipse nachvollzogen werden. Hierzu gehören die Gärtnerkonstruktion, die

Kegelschnittdefinition und die Brennpunktdefinition. Ausbaubar ist die Fragestellung durch Betrachtung von Lichtstrahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen und an der Ellipsenwand reflektiert werden (Architektonische Bedeutung bei der Gestaltung der Raumakustik).

3. **Kryptographie** Nachrichten werden mit Hilfe von großen Primzahlen recht sicher verschlüsselt. Grundlegende Sätze über Primzahlen müssen beschafft werden und angewandt werden auf ein Verschlüsselungsverfahren. Betrachtungen über die Datensicherheit können sich anschließen.
4. **Approximationen** Ähnlich wie bei dem bereits behandelten Themen “Approximation einer Funktion durch eine ganzrationale Funktion” und “Approximation einer Meßreihe durch eine Gerade” bieten sich hier weitere Überlegungen an, z.B. Approximation von Meßwerten durch eine optimale Parabel oder Approximation einer Funktion durch trigonometrische Kurven (Stichwort: Fourier-Entwicklung) an.
5. **Optimale Verpackung** Bei diesem Optimierungsproblem sollen verschiedene Verpackungsmöglichkeiten untersucht werden. Hier kann sowohl die optimale Form einer einzelnen Packung (z.B. Tetrapack oder Konservendose) betrachtet werden als auch die optimale Verpackung derselben z.B. auf einer würfelförmigen Palette. Auch die optimalale Anordnung von Würfeln in einer Kugel oder dergleichen könnten zusätzliche Fragestellungen aufwerfen.
6. **Zykloide** Wenn man den Reflektor an einer Fahrradspeiche während der Vorbeifahrt eines Fahrradfahrers betrachtet, vollführt dieser eine Zykloide als Bahnkurve. Zykloiden sind auch bei Planetenbewegungen bekannt. Aufgabe in diesem Thema wird sein, solche Zykloide graphisch darzustellen und vielleicht sogar mathematisch zu beschreiben. Hier sind vielfältige “Stangenkonstruktionen” denkbar (Spirographen), bei denen z.B. ein Stift bei Bewegung der geführten Stangen eine entsprechende Kurve zeichnet. Technische Bedeutung erlangen diese Fragestellungen z.B. bei der Umsetzung einer Drehbewegung in eine lineare Bewegung (Dampflokomotive).
7. **Weg-Optimierung** Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Orten ist nicht immer die Strecke zwischen den beiden Orten. Oftmals befinden sich landschaftliche Hindernisse und Beschwernisse dazwischen. Ziel könnte es sein, nach der Modellierung einer Landschaft zwischen zwei Punkten die günstigste Verbindung bestimmen zu lassen. Diese Fragestellung schließt sich nahtlos an an das “Rettungsschwimmer“-Problem, nur daß hier die Modellierung einer Landschaft mit einbezogen werden könnte.
8. **Splines** “Splines” sind Biegelinien. Gefragt werden könnte z.B. nach dem optimalen Kurvenverlauf bei Abbiegerspuren auf Autobahnen. Hier spielen Krümmungsradien und “sanfte” Übergänge eine wichtige Rolle (Bearbeitet werden könnten z.B. Vorgaben eines minimalen Kurvenradius, kontinuierlichen Lenkradeinschlag, Flächenverbrauchs usw. Zu gegebenen Straßenverläufen könnten verschiedene Verbindungs-Führungen betrachtet werden.
9. **Widerstandsschaltungen** In einer elektrischen oder elektronischen Schaltung befinden sich häufig Parallel- und Serienschaltungen von Widerständen. Hier ist es bei entsprechender Anzahl von Bauelementen gar nicht so leicht, den Gesamtwiderstand und somit den Stromfluß durch die Schaltung zu berechnen. Dieser

Fragestellung sehr ähnlich sind verkehrsplanerische Fragestellungen: Bei einer Verkehrszählung stellt man an gewissen Punkten einen jeweiligen Fahrzeugfluß fest. Durch ein mathematisches Modell muß man jetzt den Verkehrsfluß an nicht gemessenen Stellen bestimmen.

10. **Mehrstufige Prozesse** Bei der Populationsentwicklung gibt es von Generation zu Generation Veränderungen in der Populationsanzahl, die von vielen Faktoren abhängen (Altersverteilung, Lebensumfeld, ...). Ziel könnte es sein, hier rechen-technische Unterstützung zur Berechnung solcher Entwicklungen zu liefern. Fragestellungen hinsichtlich einer “stabilen”, “aussterbender” oder “wachsender” Population sind denkbar.
11. **Darstellung geometrischer Körper** Die räumliche Darstellung von Körpern ist eine sehr nützliche Sache, um das Vorstellungsvermögen zu schulen. In diesem Projekt könnten vielerlei geometrische Körper graphisch dargestellt werden (Würfel, Quader, Zylinder, Kegel, Prisma, ...). Schön wäre hier die Erweiterung auf eine “Animation”, bei der die Körper räumliche Drehungen vollführen. Hintergrund können mathematische Fragestellungen der Projektion sein, bei der das projizierte Bild selbst berechnet wird; genauso gut kann jedoch auch der Schwerpunkt auf eine entsprechende ästhetische Aufarbeitung des Stoffes gelegt werden, wenn für die mathematischen Fragestellungen die Unterstützung von in Maple eingebauten Routinen verwendet wird.
12. **Rund um die Fibonacci-Zahlen** Fibonacci-Zahlen werden nach einer einfachen Gesetzmäßigkeit gebildet (1,1,2,3,5,8,13,21,34, ...). Daneben gibt es noch weitere Eigenschaften, die mit dem CAS nachgeprüft werden können. Fibonacci-Zahlen spielen z.B. auch in Fragestellungen des Goldenen Schnitts hinein. Ziel könnte es hier sein, diese Eigenschaften mit Maple nachzuvollziehen.
13. **Rund um das Pascalsche Dreieck** Im Pascalschen Dreieck stecken sehr viele schöne Eigenschaften, die mit dem CAS untersucht werden könnten. Hier bieten sich insbesondere kombinatorische Betrachtungen an. Auch hier sind viele selbst gewählte Fragestellungen möglich (Übertragung der binomischen Formel auf trinomische Formeln, Beweise durch vollständige Induktion, stochastische Fragestellungen, ...).
14. **Animationen zur Tangentenproblematik** Wenn man eine Tangente an eine Kurve legen will, bildet man oft zunächst nur eine Sekante durch zwei Kurvenpunkte und läßt dann den einen Kurvenpunkt zum anderen hin konvergieren. Über diesen Weg wird in der 11. Klasse unter Benutzung des Steigungsdreiecks der Differenzenquotient und hieraus der Differentialquotient definiert. Dieser Vorgang kann sehr schön graphisch aufbereitet werden. Ziel dieser Aufgabe könnte z.B. die Erstellung einer Unterstützung für der Lehrer bzw. einer Lernhilfe für Schüler sein.
15. **Animation zur Newton-Iteration** Mit Hilfe der Newtonschen Iteration kann man näherungsweise schnell Nullstellen einer Funktion bestimmen. Um die Konvergenz dieses Verfahrens zu verdeutlichen, ist es hilfreich, diesen Vorgang graphisch zu veranschaulichen. Auch in dieser Fragestellung könnte als Ziel die Unterstützung des Lernenden durch eine ansprechende Visualisierung sein.
16. **Volumenbestimmung eines Fasses** Kepler, der als jung verheirateter Ehemann um die Auffüllung seiner Vorräte besorgt war, hatte mehrere Fässer Wein bestellt. Bei der Lieferung wurde die Weinmenge über eine ihm dubios erscheinende Visier-

methode bestimmt. Hier soll nachvollzogen werden, wie genau diese Abschätzung über die Visiermethode ist. Modelliert werden können verschiedene Faßformen, deren Volumen mit Maple exakt bestimmt werden kann. Ein Vergleich mit den aus der Visiermethode erhaltenen Werten soll die Genauigkeit dieses Verfahrens aufzeigen.

17. **Rund um die Eulersche Zahl** Die Eulersche Zahl  $E$  spielt bei Wachstums- und Zerfallsvorgängen eine herausragende Rolle. Ziel dieser Aufgabe wird es sein, Möglichkeiten zur Bestimmung dieser Zahl mit dem CAS herauszufinden und auf Praktikabilität hin zu untersuchen. Hier könnten z.B. die verschiedenen Definition dieser Zahl in der Literatur gesucht und mit Maple als äquivalent nachgewiesen werden.
18. **Zugänge zur Zahl  $\pi$**  Die Kreiszahl  $\pi$  kann auf viele Arten definiert werden. Interessant ist in diesem Zusammenhang, welche Definition das CAS kennt bzw. über welche Wege man mit Hilfe des CAS schnell zu einer Näherung von  $\pi$  kommen kann.
19. **Variation des “Sattelschlepper”-Problems** Dieses Problem wurde im Unterricht sehr idealisiert betrachtet. Realistischere Betrachtungen könnten sich ergeben, wenn man den Lenkradius oder eine Drehachse des Sattelschleppers mit in die Betrachtung einbeziehen könnte. Hier lassen sich beliebig komplexe Fragestellungen modellieren, wobei solche ausgewählt werden sollen, die mit Maple mathematisch faßbar und bearbeitbar sind.
20. **Variation des “Straßenbau”-Problems** Im Unterricht wurde bereits die optimal kurze Straßenverbindung zwischen vier im Quadrat angeordneten Punkten bestimmt. Hier gibt es eine Vielzahl von Erweiterungsmöglichkeiten (mehr Punkte, andere Lage, ...), so daß der Phantasie keine Grenzen gesetzt sind.
21. **Wurfbahnen** In der Physik behandelt man i.d.R. rechnerisch idealisierte Vorgänge, z.B. den Wurf eines Steines unter Vernachlässigung der Luftreibung. Aufgabe könnte es hier sein, die Bahnkurve eines Körpers unter Einbeziehung von Reibungskräften zu bestimmen. Ein Ansatz wäre eine iterative Berechnung der Bewegung. Technisch interessant werden die Fragestellungen bei Sinkbewegungen (Absinken von Schlamm oder Luftschadstoffen), bei denen mehrere physikalische Konstanten in die Betrachtung einbezogen werden müssen (z.B. Viskosität des Mediums, Luftreibungszahl des Sinkkörpers, ... )
22. **Bewegungsabläufe** Ähnlich wie bei Wurfbewegungen kann man “geführte” Bewegungen betrachten, z.B. das Rollen auf einer geneigten Schiene oder das Beschleunigen einer Kugel in einer Rinne oder ein Überschlags-Karussell auf dem Jahrmarkt. Ziel wird es auch hier sein, den zeitlichen Ablauf der Bewegung zu modellieren.
23. **Verkehrsfluß** Das Problem des Verkehrsstaus ist auf den Autobahnen tägliche Realität. Wie aus dem “Nichts” entsteht eine Stau, und plötzlich läuft der Verkehr ohne ersichtlichen Grund wieder flüssig. Gesucht ist nach einer mathematischen Begründung für dieses o.g. Phänomen. Hier spielen Überlegungen hinsichtliche Fahrzeugarten (LKW, PKW, Busse, ...), Fahrzeugdichte, Sicherheitsabstand, Reaktionszeit und vieles mehr hinein.
24. **Wahlthema** Wenn Dich eine andere Fragestellung besonders interessiert, könnte man daraus vielleicht auch eine sinnvolle Aufgabe basteln. Frag doch mal nach!

25. **Alternative:** Falls Du Dich jetzt nicht an eines der o.g. Themen traust – diese sind ohne weitere Informationen ja sicherlich recht abschreckend! – gibt es natürlich auch noch eine etwas einfachere Alternative:

Du bereitest ein bereits im Unterricht behandeltes Thema entsprechend auf. Hintergedanke ist hier eine Art Dokumentation des behandelten Stoffes. Hierzu könnten etwa folgende Themen gehören:

- Durchführung einer Kurvendiskussion (u.U. auch für andere Funktionsklassen)
- Approximation einer Funktion durch eine ganzrationale Funktion (über Stützstellen bzw. über die Ableitungen an einer Stelle)
- Näherungsgerade für Meßwerte
- Maximale Leiterhöhe (hier sollte man sich dann aber weitere Fragestellungen überlegen, da das Thema sonst zu kompakt ist).
- Tisch im Dreieckszimmer (auch hier könnte eine gewisse Variation der Fragestellung im Anschluß gebracht werden)
- Stab um die Ecke
- Sattelschlepper-Problem
- Einführung in Maple; gerade für den Anfänger sind einführende Aufgaben und eine Erläuterung der Befehle hilfreich. Für eine solche Darstellung anhand entsprechender und ansprechender Aufgaben sind Einsteiger stets dankbar.
- Zahlentheoretische Übungen mit Maple (Primzahluntersuchungen, Teilerfolgen, ggT, kgV, ... )
- Flächenberechnung – Hinführung zur Integralrechnung
- Volumenberechnung von Rotationskörpern
- Bogenlänge einer Kurve
- Oberfläche eines Rotationskörpers
- ...

### 3 Ein Tip zum Abschluß

Nimm Dir nicht zu viel vor! Bearbeite lieber zunächst nur einen Teilaspekt des Themas gründlich und formuliere die entsprechende Problemlösung sauber aus. So verhinderst Du, daß Du am Schluß vielleicht viel gearbeitet hast, aber nicht mehr die Zeit findest, das alles entsprechend zu dokumentieren. In diesem Fall würdest Du Deine Leistung nämlich weniger deutlich zur Geltung bringen können, wie wenn Du etwas weniger bearbeitet hast, dies jedoch auch ordentlich dokumentiert veröffentlichst.

Es spricht auch nichts dagegen, bereits nach ein bis zwei Wochen eine Zwischenbilanz zu ziehen und die bis dahin erreichten Ergebnisse publikationsreif aufzubereiten. Weitere Überlegungen mit anschließendem Einbau in die Dokumentation sind dann sicher noch problemlos möglich.