Der Pflichtteil soll aus kleineren Aufgaben bestehen, die ohne Hilfsmittel zu bearbeiten sind.

Er soll die Grundkompetenzen abprüfen. Dazu gehören:

- algorithmische Grundfertigkeiten
- Grundlegende Verfahren und Begriffe (auch Verbalisierungen)
- Verständnisbereich

Der folgende Katalog soll Beispiele dafür aufzeigen, was konkret verlangt werden kann, ohne dabei den Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

I Algebra/Analysis:

<u>Differentiation/Integration:</u>
- Ableitung(en) von Funktionen (ganzrationale, gebr. rationale, e-Funktionen, trig. Funktionen, Wurzelfunktionen; Produkt-, Quotienten-, Kettenregel)
- Integration/Stammfunktion (lineare Substitution)

<u>Gleichungslehre:</u>
- Gauß-Verfahren (ohne Formvariablen, verschiedene Lösungsräume)
- Gleichungen höherer Ordnung (nicht unbedingt ganzrational, mit bekannter Nullstelle, Substitution)
- Bruchgleichungen

<u>Funktionale Betrachtungen:</u>
- Tangente, Normale an Kurven
- Aufstellen von Funktionsgleichungen mit Randbedingungen
- Skizze des Schaubilds einer Funktion aus dem Funktionsterm
- Herleitung wichtiger Eigenschaften aus dem Funktionsterm
- Kenntnis wichtiger Funktionstypen
- Translation (horizontal, vertikal)
- Auffinden des Funktionsterms bei gegebenem Schaubild
- Interpretation charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Schaubildes
- Elemente der Kurvendiskussion

II Geometrie:

<u>Geraden/Ebenen:</u>
- Gleichungen von Ebenen und Geraden
- Ebene aus drei Punkten
- Lage von Geraden zueinander (Schnitt, parallel, windschief)
- Lage von Gerade und Ebene zueinander (orthogonal, parallel, Inklusion, Schnittpunkt)
- Lage von Ebenen zueinander (parallel, Schnittgerade, identisch)
- Skizze des Schaubilds einer Ebene bzw. Gerade im 3D-Koordinatensystem
- Auffinden einer entsprechenden Gleichung für Ebene bzw. Gerade, wenn Skizze gegeben

<u>Abstand/Winkel:</u>
- Abstand Punkt Ebene
- Abstand Punkt Gerade
- Winkel zwischen Ebenen bzw. zwischen Geraden bzw. zwischen Ebene und Gerade

Algorithmische Grundkenntnisse zur Differentiation/Integration
u.a. Ableitung(en) von Funktionen (ganzrationale, gebr. rationale, e-Funktionen, trig. Funktionen, Wurzelfunktionen; Produkt-, Quotienten-, Kettenregel)
Integration/Stammfunktion (lineare Substitution)

1. Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)$.

2. Leiten Sie einmal ab.

a) $f(x) = x^2\, e^{-2x}$ b) $g(x) = (\, k + e^{-x}\,)^2$

c) $h(x) = \ln(1+3x^2)$ c) $k(x) = 3\sqrt{x}\ \ln(3x)$

3. Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = 8 - \frac{16}{x^2}$ b) $f(x) = 3(x^2 - 4e^{-2x})$ c) $f(x) = \frac{2}{(9+2x)^2}$.

Gleichungslehre:
u.a. Gleichungen höherer Ordnung
(nicht unbedingt ganzrational, mit bekannter Nullstelle, Substitution)

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen: a) $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0$ b) $e^x + e^{\frac{1}{2}x} - 2 = 0$

5. Lösen Sie die Gleichungen

a) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ b) $\frac{2x}{x-4} + \frac{3x}{x+4} = \frac{4(x^2+2x-8)}{x^2-16}$

Funktionale Betrachtungen:
u.a. Aufstellen von Funktionsgleichungen mit Randbedingungen

6. Eine Parabel 3.Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung. Ihr Wendepunkt ist W(-1 / 2).
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel !

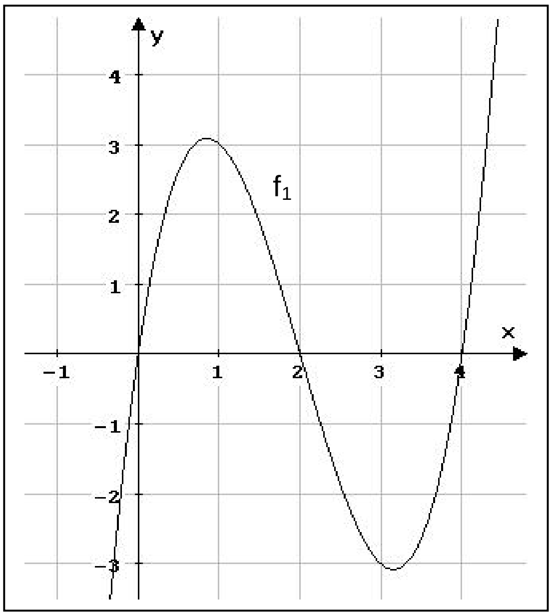
7. Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \begin{cases} -x^2 + s \cdot x + t & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 + 2 & \text{sonst} \end{cases}$.

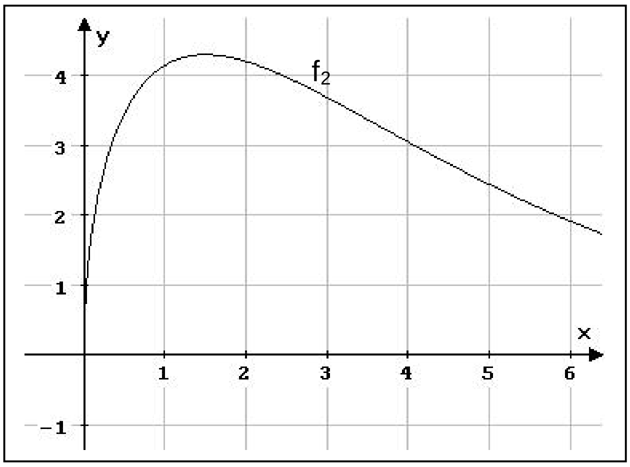
Bestimmen Sie s und t so, dass die Funktion an der Stelle x=2 differenzierbar ist.

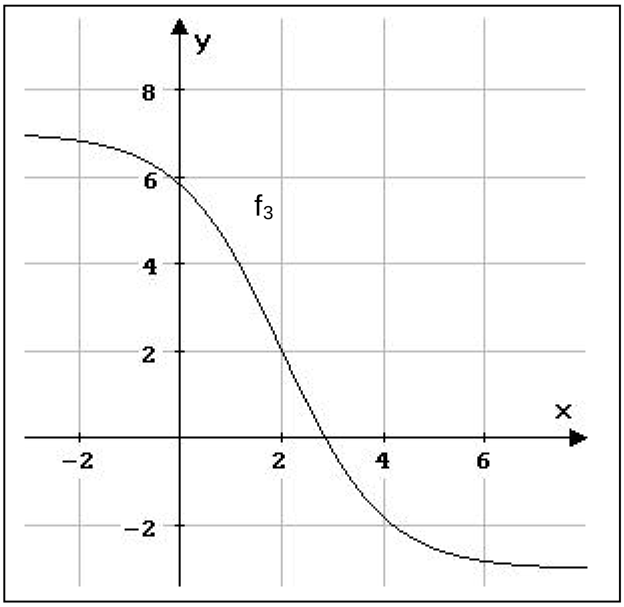
Funktionale Betrachtungen:
u.a. Graphische Differentiation / Integration
Verständnis von f ‘ bzw. f “

8. Die Funktionen f_1, f_2 und f_3 haben die folgenden Schaubilder:

a) Skizzieren Sie in einem jeweils neuen Koordinatensystem die Schaubilder der Ableitungsfunktionen.







b) Im Folgenden finden Sie Aussagen über f‘ bzw. f‘‘. Streichen Sie die Funktionen aus Aufgabenteil a) durch, auf welche diese Aussagen nicht zutreffen ?

1.) f‘(0) > 0 f_1 f_2 f_3

2.) f‘(1)=0 f_1 f_2 f_3

3.) f‘ ist bei x=2 minimal. f_1 f_2 f_3

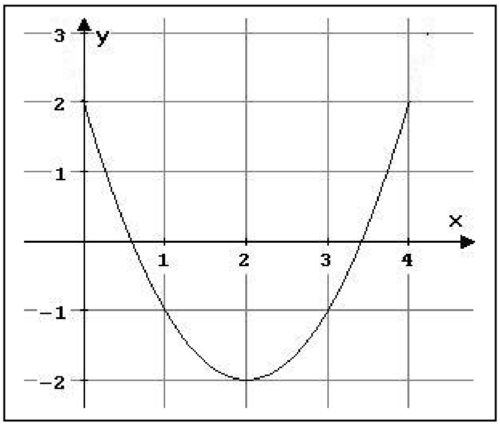
4.) f‘‘ für x>4 negativ f_1 f_2 f_3

5.) f‘ negativ f_1 f_2 f_3

9. Eine Funktion g hat die Nullstelle x_0.

Welche Aussage können Sie über das Schaubild einer zugehörigen Stammfunktion G im Punkt $P(x_0|...)$ machen?

10. Gegeben ist das Schaubild einer quadratischen Funktion f im Intervall I = [0;4].



a) Skizzieren Sie im Intervall I das Schaubild der Ableitungsfunktion f ‘ und das Schaubild der Integralfunktion $J_0(x) = \int_0^x f(t)dt$.

b) Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(A1): f ‘ hat im Intervall I genau eine Nullstelle

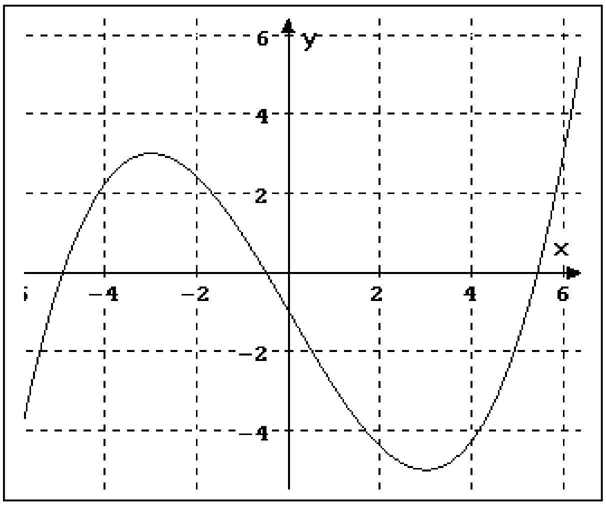
(A2): J_0 (x) hat genau eine Nullstelle in I

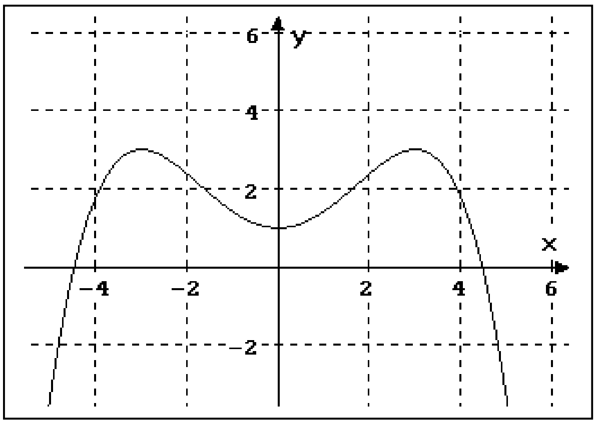
(A3): J_0 (x) hat Extremstellen in I

11. a) Gegeben sind die beiden Parabeln 3. bzw 4. Ordnung (siehe Abbildungen) als Schaubilder von Funktionen.

Zeichnen Sie jeweils die Schaubilder der ersten Ableitungsfunktion in das entsprechende Koordinatensystem.

Tragen Sie für die Parabel dritter Ordnung auch das Schaubild der zweiten Ableitung ein.





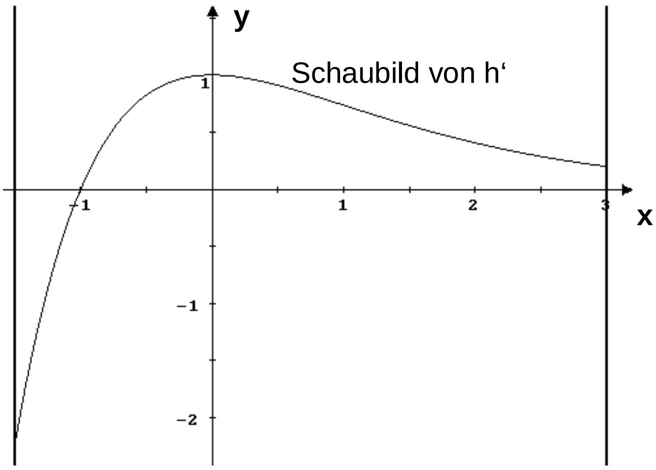
b) Was bedeutet es für das Schaubild einer Funktion, wenn f(2) = 3, f '(2) = –1, f ''(2) = 0 und f '''(2) $\neq$ 0 gilt?

12. h ist eine für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion.

Nebenstehend ist für $-1{,}5 \leq x \leq 3$ das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion h' dargestellt.

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen über die Funktion h richtig, falsch oder unentscheidbar sind.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.



(1) An der Stelle $x = -1$ hat das Schaubild von h einen Tiefpunkt.

(2) $h(x) > 0$ für $0 \leq x \leq 3$.

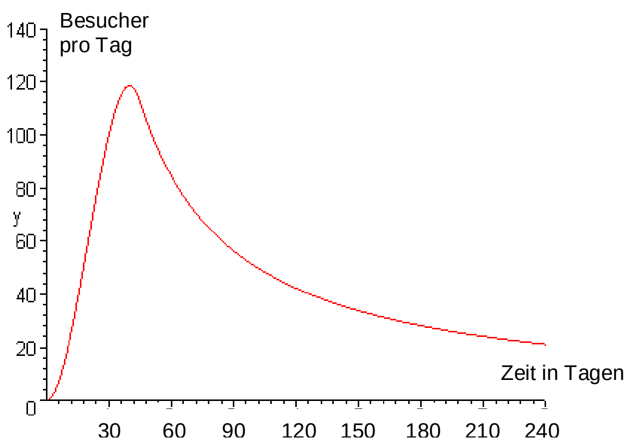
(3) An der Stelle $x = 0$ hat das Schaubild von h eine Tangente, die parallel ist zur Geraden mit der Gleichung $y = x - 7$.

(4) h ist streng monoton wachsend für $-1{,}5 \leq x \leq 0$.

Funktionale Betrachtungen:
u.a. Interpretation charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Schaubildes
Elemente der Kurvendiskussion
Kenntnis wichtiger Funktionstypen

13. Eine Firma registriert wie oft ihre Homepage im Internet besucht wird.

Das nebenstehende Schaubild zeigt die Anzahl der Besucher pro Tag.



a) Nennen Sie besondere Punkte und Bereiche dieses Schaubilds und ihre Bedeutung für die Firma.

b) Erläutern Sie den Begriff „lokale Extremstelle“ anschaulich.

Wie kann man bei differenzierbaren Funktionen lokale Extremstellen bestimmen?

Überprüfen Sie damit, ob die Funktion f mit $f(x) = 3e^{-x^2}$ lokale Extremstellen besitzt.

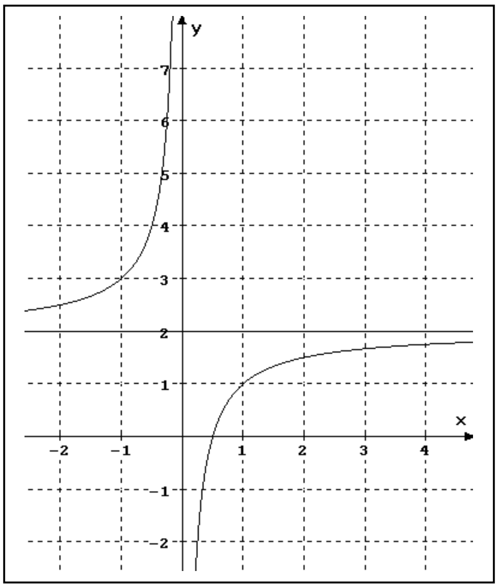
c) Nennen Sie zwei Funktionen, die keine lokale Extremstellen haben.

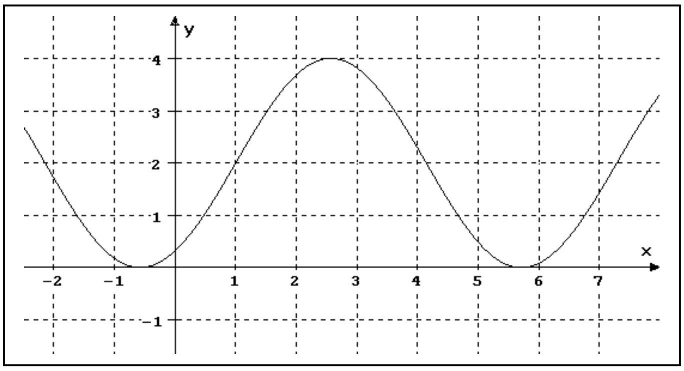
14. Zeigen Sie, dass das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}$; $x \in IR$ an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt hat.

15. Prüfen Sie nach, ob das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$; $x \in IR$ an der Stelle x = -1 einen Tiefpunkt hat.

Funktionale Betrachtungen:
Kenntnis wichtiger Funktionstypen
Translation (horizontal, vertikal)
Auffinden des Funktionsterms bei gegebenem Schaubild

16. Geben Sie zu den skizzierten Schaubildern jeweils einen möglichen Funktionsterm an.





Funktionale Betrachtungen:
Kenntnis wichtiger Funktionstypen
Skizze des Schaubilds einer Funktion aus dem Funktionsterm

17. Gegeben sind die Funktionen f mit f(x) = $\frac{1}{2}x + 1$ und g mit g(x) = $-\frac{1}{4}x^2 - 1$.

a) Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem die Schaubilder von f und g im Intervall I = [-2; 2].

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt den die Schaubildern von f und g im Intervall I einschließen.

c) Skizzieren Sie im Intervall I den Verlauf des Schaubilds der Funktion h mit h(x) = f(x) + g(x). Begründen Sie, dass h genau zwei Nullstellen in I hat.

Funktionale Betrachtungen:
u.a. Verständnis
Kenntnis von Begriffen, Definitionen (Ableitung, Monotonie,...)

18. Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^3 + 6x - 3$; $x \in IR$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an das Schaubild von f, die orthogonal zur Geraden $x + 6y - 12 = 0$ ist.

19. Geben Sie eine Definition der Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 an.

Anwendungen
u.a. Ableitung im Zusammenhang mit Tangentensteigung, Änderungsrate, Extremwertaufgaben
Integral im Zusammenhang mit Flächenberechnungen, Wirkung, Mittelwertbildung

20. Ein 60m langer Zaun soll ein möglichst großes rechteckiges Gartengrundstück so umgeben, dass 2m für die Einfahrt frei bleiben.

Wie müssen die Seitenlängen des Rechtecks festgelegt werden?

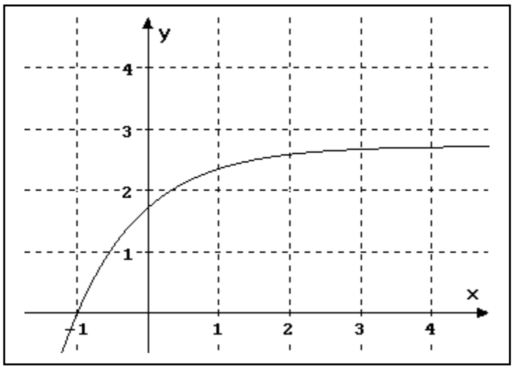
21. Gegeben ist der Parabelbogen mit der Gleichung $f(x) = 2 - \frac{x^2}{2}$ mit $x \in [-2;+2]$ sowie der Parabelpunkt A(-2 / 0). Die Gerade x = u schneidet den Parabelbogen in P und die x-Achse in B. Für welchen Wert von u ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABP am größten ?

22. Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = e - e^{-x}$; $x \in IR$

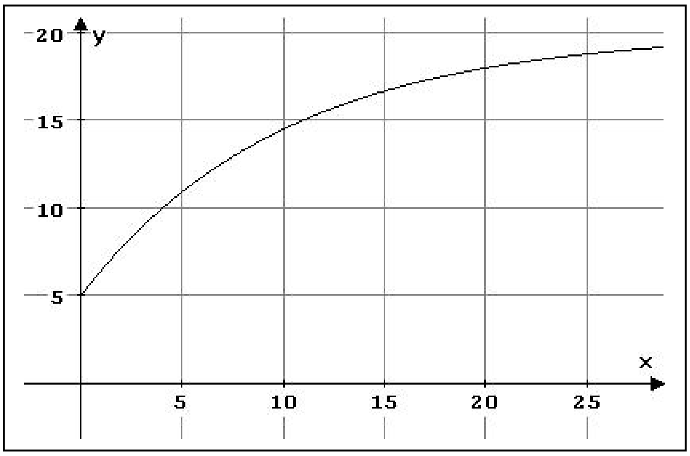
Ihr Schaubild sei K.

a) Berechnen Sie den Inhalt A_1 des Flächenstücks, das K mit den Koordinatenachsen umschließt.

b) K umschließt mit der y-Achse und der waagrechten Asymptoten ein ins Unendliche reichendes Flächenstück mit dem Inhalt A_2.
Prüfen Sie nach, ob $A_1 = A_2$ gilt.



23. Nimmt man ein Glas mit einer Flüssigkeit aus dem Kühlschrank, so erwärmt sich die Flüssigkeit. Durch $f(x) = 20 - 15e^{\left(-\frac{1}{10}x\right)}$; $x \geq 0$ (x in Minuten, f(x) in Grad Celsius) wird ein solcher Erwärmungsvorgang beschrieben.



a) Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote.
Welche Bedeutung hat die Asymptote für den Erwärmungsvorgang ?

b) Zu welcher Zeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Flüssigkeit erwärmt, am größten ?

c) Berechnen Sie für die ersten 10 Minuten die Durchschnittstemperatur.

Gleichungslehre:
u.a. Gauß-Verfahren (ohne Formvariablen, verschiedene Lösungsräume)

1. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 4x_3 & = & 22 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & & & = & 15 \end{array}$$

2. a) Untersuchen Sie das folgende lineare Gleichungssystem auf Lösbarkeit:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

b) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Grundkenntnisse zu Geraden/Ebenen:
u.a. Gleichungen von Ebenen und Geraden
Skizze des Schaubilds einer Ebene bzw. Gerade im 3D-Koordinatensystem
Auffinden einer entsprechenden Gleichung für Ebene bzw. Gerade, wenn Skizze gegeben
Lagebeziehungen
Gerade-Gerade, Gerade-Ebene, Ebene-Ebene

3. Gegeben sind die beiden Ebenen E_1 und E_2 durch

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und } E_2: x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 4$$

Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden.

4. Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g durch

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R} \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in R.$$

a) Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E an.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und E.

c) Die Ebene F enthält g und ist orthogonal zu E. Geben Sie eine Gleichung von F an.

5. Gegeben sind die Punkte A (2 | –1 | 3), B (4 | 2 | – 4) und C (0 | 1 | – 2).
Zeigen Sie, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die diese Punkte enthält.

6. Gegeben sind die Ebenen E: $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 12$ und F: $2x_1 + 3x_2 = 6$.

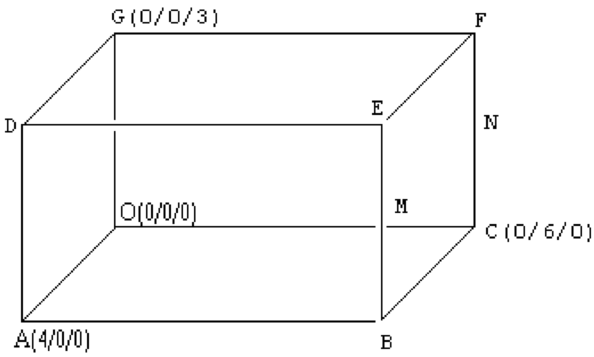
a) Veranschaulichen Sie die Ebenen E und F mithilfe ihrer Spurgeraden in einem Koordinatensystem.

b) Zeichnen Sie die Schnittgerade s von E und F ohne weitere Rechnung in das Koordinatensystem ein und begründen Sie Ihr Vorgehen.

7. In der Abbildung ist ein Quader dargestellt.
M und N sind die Mittelpunkte der zugehörigen Kanten.

a) Welche Lage haben die Geraden g = (OM) und h = (AN) zueinander?
Begründen Sie ihre Antwort geometrisch.

b) Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene an, die D, E und F enthält.



8. Gegeben sind vier Ebenen E, F, G und H mit

$$E: -4x_1 + 12x_2 - 8x_3 = 7$$
$$F: \quad x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$
$$G: \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$H: \quad 2x_1 + 5x_2 = 6 \ .$$

a) Welche besondere Lage haben die Ebenen E und F zueinander?
Wie erkennen Sie dies an den Koordinatengleichungen?
Wie wäre die rechte Seite in der Gleichung von E abzuändern, damit E und F identische Ebenen wären?

b) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen F und G.

c) Welche besondere Lage hat die Ebene H im Koordinatensystem?

9. Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

$$g:\ \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}\,; \quad r \in IR \qquad \text{und} \qquad E:\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0\,.$$

a) Welche geometrische Bedeutung haben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{u}$ bzw. $(\vec{x} - \vec{p})$ und $\vec{n}$? Veranschaulichen Sie Ihre Antwort mithilfe einer Skizze.

b) Welche Beziehungen müssen für die in den Gleichungen vorkommenden Vektoren gelten, damit

i) g parallel zu E ist ?

ii) g senkrecht zu E verläuft ?

10. Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; s \in IR$

a) Geben Sie eine Gleichung der Parallelen k zu g durch den Punkt P(-1 | 4 | 3) an. Geben Sie außerdem eine Gleichung der Mittelparallelen m von g und k an und begründen Sie kurz Ihr Vorgehen.

b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und der Geraden

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in IR$$

Abstand/Winkel:
u.a. Abstand Punkt Ebene
Abstand Punkt Gerade
Winkel zwischen Ebenen bzw. zwischen Geraden bzw. zwischen Ebene und Gerade

11. Gegeben sind die Geraden g und h mit den Gleichungen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in IR$$

Zeigen Sie, dass die beiden Geraden windschief sind.

12. Gegeben sind die Geraden g und h mit den Gleichungen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ mit } s, t \in IR.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Geraden keinen gemeinsamen Punkt haben und bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

13. Welche Punkte der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $s \in IR$ haben von der Ebene

$E: x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 1$ den Abstand 13 ?

14. Die Punkte A(-6/-2/4), B(4/-2/4), C(3/10/7) und D(0/5/-3) bilden eine Pyramide mit der Grundfläche ABC.

Stellen Sie die Pyramide in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

Berechnen Sie die Höhe der Pyramide.

15. Gegeben sind die Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und der Punkt Q(6 | 9 | 4).

Berechnen Sie den Abstand des Punktes Q von der Ebene E.

16. a) Welcher Punkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $s \in IR$

hat die kürzeste Entfernung vom Punkt P(-1 | 2 | -3) ?

b) Von welcher der Ebenen E_a: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = a$ mit $a \in IR$ hat der Punkt P(-1 | 2 | -3) den Abstand 2 ?