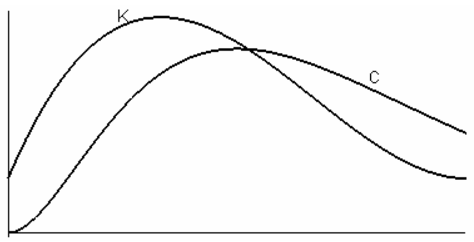
Aufgabe 6 (Entwicklung einer Population):
(Anforderungen: Interpretation von Schaubildern; Integralfunktion in der Praxis)
Von einer Population wird - jeweils in Abhängigkeit von der Zeit - die Geburtenrate (in Individuen pro Jahr) durch die Funktion f und die Todesrate (in Individuen pro Jahr) durch die Funktion g beschrieben. Die zugehörigen Schaubilder seien K und C (vgl. Figur). Zu Beginn der Beobachtung seien keine Individuen vorhanden.

Geburtenrate
Todesrate



Zeit

a) Gesucht sind
die Gesamtzahl der Geburten zur Zeit t,
die Zahl der Lebenden zur Zeit t,
die Zeit t*, zu der die Population am größten ist,
die Zeit $\hat{t}$, zu der die Wachstumsrate der Population am größten ist.
Beschreiben Sie, wie man die gesuchten Zahlen berechnen kann.
b) Skizzieren Sie ein Schaubild für die Zahl der Lebenden zur Zeit t.

Aufgabe 7 (Öltank):
(Anforderungen: Integral als Summe von Änderungen; Funktionsanpassung)
Ein Öltank leckt, die Ausflussrate wird stündlich gemessen. Die Tabelle zeigt das Ergebnis dieser Messungen.

Zeit (in h)	0	1	2	3	4
Ausflussrate (in l/h)	35	30	26	23	21

a) Schätzen Sie anhand der Tabellenwerte den maximalen Ölverlust während der ersten vier Stunden. Erläutern Sie Ihre Schätzung und die dabei verwendeten Annahmen.
b) Bestimmen Sie eine Funktion, deren Schaubild den Verlauf der Ausflussrate näherungsweise wiedergibt.
Schätzen Sie hiermit den Ölverlust während der ersten vier Stunden.
c) Nach welcher Zeit sind 100 Liter Öl ausgelaufen?

Aufgabe 8 (Weltbevölkerung):
(Anforderungen: Funktionsanpassung; Beurteilung einer Modellierung; Interpretation eines Integrals)
In der Tabelle sind Schätzungen über die Größe der Weltbevölkerung angegeben.

Jahr	1700	1750	1800	1850	1900	1950	1970	1980	1990	2000
Bevölkerung (in Mrd.)	0,594	0,707	0,841	1,000	1,542	2,555	3,771	4,454	5,278	6,121

a) Gesucht ist eine Funktion f vom Typ $f(t) = \frac{a}{1+b\cdot t}$, deren Schaubild die angegebenen Daten gut annähert; dabei sei t die Zahl der Jahre seit 1700 und f(t) die Anzahl der Weltbevölkerung in Milliarden.
Berechnen Sie a und b; geben Sie den Term der Funktion f an.
b) Veranschaulichen Sie die angegebenen Daten. Zeichnen Sie ein Schaubild von f im gleichen Koordinatensystem.
Wie beurteilen Sie die Modellierung durch die Funktion f?

c) Schreiben Sie den Term aus Teilaufgabe a) so um, dass t=1700 dem Jahr 1700 entspricht.

Die Verdoppelungszeit t_V der Weltbevölkerung ist nicht konstant, sondern hängt von der Zeit t ab.
Ermitteln Sie t_V in Abhängigkeit von t.
d) Betrachtet wird das Integral

$$\frac{1}{25}\int_{t_0}^{2000} g(t)\,dt\,,$$

wobei g(t) der in Teilaufgabe c) ermittelte Term ist.
Was wird mit diesem Integral berechnet?

Aufgabe 9 (Feldmäuse):
(Anforderungen: Berechnungen innerhalb eines vorgegebenen Modells; exponentielles Wachstum; Integral bei der Beurteilung von Wirkungen)
Wenn Feldmäuse günstige Bedingungen haben, so kann eine Population sehr rasch anwachsen. Eine vereinfachende Modellrechnung geht davon aus, dass eine Mäusepopulation pro Monat um jeweils 7% ihres Bestandes wächst. Ist sie allerdings auf 3000 Mäuse pro Hektar angewachsen, so kommt es zum Zusammenbruch der Population auf etwa 100 Tiere pro Hektar. Verursacht wird dieser Zusammenbruch durch Gedrängeschock vermittels Blutzuckersenkung. Die Feldmauspopulation entwickelt sich also zyklisch.
a) Geben Sie einen Term an, der beschreibt, wie sich nach diesem Modell eine Population von anfangs 100 Mäusen auf einem Hektar entwickelt.
Wie lange dauert es, bis sie ihre Maximalgröße erreicht hat?
b) Nun interessiert der Schaden, den diese Mäusepopulation in ihrem Lebensraum anrichtet.
Begründen Sie, warum man annehmen kann, dass der Schaden, den eine zahlenmäßig konstante Population von N Mäusen in der Zeitspanne t anrichten würde zu $N \cdot t$ proportional ist.
Begründen Sie, warum dann $\int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt$ ein sinnvolles Maß für den Schaden ist, den eine zeitlich veränderliche Population von N(t) Mäusen zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 anrichtet.
Vergleichen Sie den Schaden im fünften Monat des ersten Jahres mit dem Schaden im fünften Monat des zweiten Jahres.

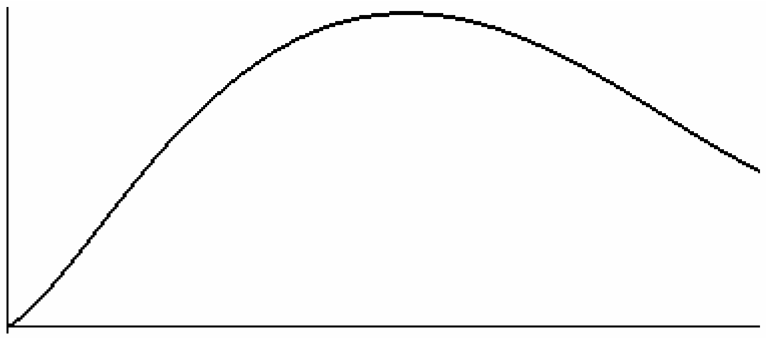
Lösungen:

Aufgabe 6:
a) Ist F(t) die Gesamtzahl der Geburten zur Zeit t, so ist F '(t)=f(t); weiterhin ist F(0)=0.
Also ergibt sich F(t) als Integral über die Funktion f von 0 bis t; d.h. als Flächeninhalt unter dem Schaubild K von 0 bis t.
Ist L(t) die Zahl der Lebenden zur Zeit t und D(t) die Zahl der Todesfälle bis zur Zeit t, so gilt: L(t)=F(t) - D(t). Also ergibt sich L(t) als Flächeninhalt zwischen den Schaubildern K und C von 0 bis t. Dabei ist für $t > \bar{t}$ mit $f(\bar{t}) = g(\bar{t})$ die Fläche von $\bar{t}$ bis t negativ zu nehmen.
Die Population ist am größten, wenn L '(t)=F '(t) – D'(t)=0 ist. Aus F '(t) – D '(t)=0 folgt F '(t)=D '(t) bzw. f(t)=g(t). Damit ist die Population am größten zur Zeit $\bar{t}$, dem Abszissenwert des Schnittpunktes von K und C.
Gesucht ist die Zeit $\hat{t}$, wo L '(t) ein Maximum hat, d.h. L "(t)=0 ist.
Aus L "(t)=F "(t) – D "(t)=f '(t) – g '(t)=0 folgt f '(t)=g '(t), d.h., die Zeit $\hat{t}$ ist die Zeit, wo K und C die gleiche Steigung haben. Es sei t_1 die Zeit mit gleicher positiver und t_2 die Zeit mit gleicher negativer Steigung.

Für $t < t_1$ ist f '(t)>g '(t), d.h. L "(t)>0; für $t_1<t<t_2$ ist L "(t)<0; für $t>t_2$ ist L "(t)>0.

Also ist $\hat{t} = t_1$. Man erhält somit die gesuchte Zeit als die Stelle, an der K und C die gleiche positive Steigung haben.

b)



Aufgabe 7:

a) Bei konstanter Ausflussrate gilt: Ölverlust (in l) = Ausflussrate (in l/h) $\times$ Zeit (in h).
Die Funktionswerte für die Ausflussrate sind streng monoton fallend. Eine Abschätzung nach oben bzw. nach unten für den maximalen Ölverlust V_4 während der ersten vier Stunden erhält man also mithilfe der Obersumme O_4 bzw. der Untersumme U_4.

$O_4 = 35\cdot1+30\cdot1+26\cdot1+23\cdot1=114$; $U_4 = 30\cdot1+26\cdot1+23\cdot1+21\cdot1=100$

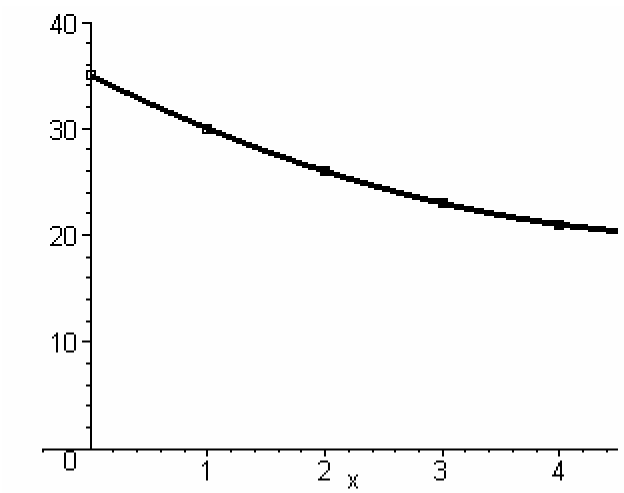
Damit gilt: $100 \le V_4 \le 114$.

b) Die gezeichneten Punkte (vgl. Figur) scheinen näherungsweise auf dem Schaubild einer quadratischen Funktion zu liegen.

Mit dem Ansatz $y = ax^2 + bx + c$ ergibt sich (GTR; quadratische Regression):

a=0,5; b= - 5,5; c=35.

Damit ist f: $x \mapsto 0{,}5x^2 - 5{,}5x + 35$ die gesuchte Funktion; die Figur zeigt ein Schaubild von f.
Die Annäherung des Schaubildes an die Punkte ist sehr gut.



Ermittlung des Ölverlustes während der ersten vier Stunden mithilfe von f:

$$\int_0^4 (0{,}5x^2 - 5{,}5x + 35)\,dx \approx 106{,}7 \qquad \text{(GTR)}$$

Während der ersten vier Stunden sind rund 106,7 Liter Öl ausgelaufen.

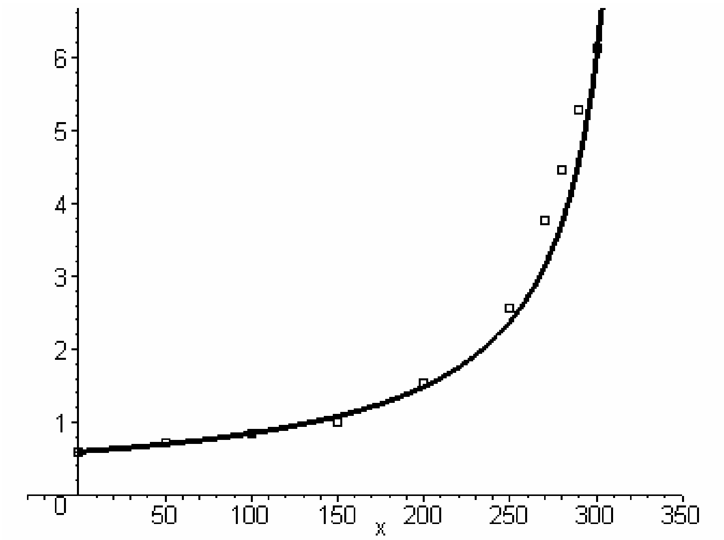
c) Berechnung der Zeit, nach der 100 Liter Öl ausgelaufen sind:

Ist t die gesuchte Zeit, so gilt:

$\int_0^t (0{,}5x^2 - 5{,}5x + 35)\,dx = 100$. Aus $\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + 35x\right]_0^t = 100$ folgt $\frac{1}{6}t^3 - \frac{11}{4}t^2 + 35t = 100$

bzw. $t^3 - 16{,}5t^2 + 210t - 600 = 0$. Mithilfe des GTR ergibt sich $t \approx 3{,}7$.
Nach rund 3,7 Stunden sind 100 Liter Öl ausgelaufen.

Aufgabe 8:
a) Punktprobe mit den Punkten $P_1(0|0{,}594)$ und $P_{10}(300|6{,}121)$ ergibt
a=0,594 und $b \approx -0{,}003$. Damit gilt: $f(t) = \frac{0{,}594}{1-0{,}003 \cdot t}$.
(Andere Möglichkeit: Funktionsanpassung mithilfe einer Ausgleichsgeraden)
b) Die Figur veranschaulicht die gegebenen Daten und die Funktion f. Die Annäherung des Schaubildes an die Daten über einen Zeitraum von 300 Jahren ist erstaunlich gut. Vorhersagen mit der Funktion f sind aber kaum möglich, denn die gebrochenrationale Funktion f hat ungefähr an der Stelle 333, dh. irgendwann im Jahr 2033, eine Unendlichkeitsstelle.



c) Für die Funktion g mit $g(t) = \frac{0{,}594}{1-0{,}003(t-1700)}$ entspricht t=1700 dem Jahr 1700.
Aus $\frac{0{,}594}{1-0{,}003(t+t_V-1700)} = \frac{2 \cdot 0{,}594}{1-0{,}003(t-1700)}$ folgt $\frac{1-0{,}003t-0{,}003t_V+5{,}1}{0{,}594} = \frac{1-0{,}003t+5{,}1}{1{,}188}$.
Auflösung ergibt: $t_V \approx 1016{,}7 - 0{,}5t$.
d) Die Zahl, die sich als Integral über die Funktion g vom Jahr t_0 bis zum Jahr 2000 ergibt, hat die Einheit Personen-Jahre. Dividiert man diese Zahl durch 25, ergibt sich die Anzahl der Personen, die im Zeitraum von t_0 bis 2000 jemals auf der Erde gelebt haben, wenn man von einem Durchschnittsalter von 25 Jahren ausgeht.

Aufgabe 9:
a) Es sei N die Anzahl der Feldmäuse pro Hektar und t die Zeit in Monaten.
Mit dem Ansatz $N(t) = 100 \cdot e^{k \cdot t}$ und N(1)=107 erhält man k=ln 1,07 $\approx$ 0,06766;
$N(t) = 100 \cdot e^{0{,}06766 \cdot t}$.
Aus $3000 = 100 \cdot e^{t \cdot \ln 1{,}07}$ folgt $t = \frac{\ln 30}{\ln 1{,}07} \approx 50{,}27$.
Die Mäusepopulation erreicht also nach rund 50 Monaten ihre Maximalgröße.

b) Sinnvolle Annahmen:

Doppelt so viele Mäuse richten doppelten Schaden an.
In der doppelten Zeit ist der angerichtete Schaden doppelt so groß.
Aus "Schaden ist proportional zu N" und "Schaden ist proportional zu t" folgt
"Schaden ist proportional zu $N \cdot t$".
Bei konstantem N(t)=N kann $N \cdot t$ gedeutet werden als Inhalt einer rechteckigen Fläche.
Mit der Summendefinition des Integrals folgt der Rest.
Vergleich der Schäden:

Es ist $\int_4^5 100 \cdot e^{0,06766 \cdot t}\, dt \approx 135,6$ und $\int_{16}^{17} 100 \cdot e^{0,06766 \cdot t}\, dt \approx 305,4$. (GTR)

Der Quotient $\frac{305,4}{135,6} \approx 2,25$ besagt, dass der Schaden im zweiten Jahr über doppelt so groß ist wie im ersten Jahr.