Algorithmische Grundkenntnisse zur Differentiation/Integration
u.a. Ableitung(en) von Funktionen (ganzrationale, gebr. rationale, e-Funktionen, trig. Funktionen, Wurzelfunktionen; Produkt-, Quotienten-, Kettenregel)
Integration/Stammfunktion (lineare Substitution)

1. Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)$.

Prokukt- und Kettenregel

3. Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = 8 - \frac{16}{x^2}$ b) $f(x) = 3(x^2 - 4e^{-2x})$ c) $f(x) = \frac{2}{(9+2x)^2}$.

Lineare Substitution

Gleichungslehre**:**
u.a. Gleichungen höherer Ordnung
(nicht unbedingt ganzrational, mit bekannter Nullstelle, Substitution)

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen: a) $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0$ b) $e^x + e^{\frac{1}{2}x} - 2 = 0$

Polynomdivision Substitution

5. Lösen Sie die Gleichungen

a) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

b) $\frac{2x}{x-4} + \frac{3x}{x+4} = \frac{4(x^2+2x-8)}{x^2-16}$

Mittelstufen-kenntnisse

Funktionale Betrachtungen**:**
u.a. Aufstellen von Funktionsgleichungen mit Randbedingungen

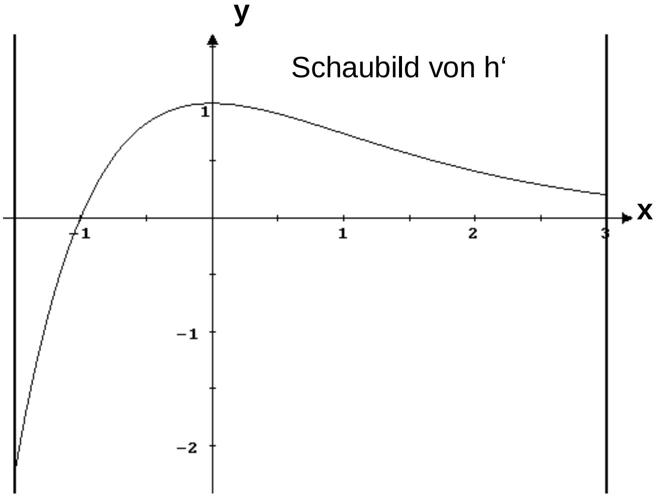
6. Eine Parabel 3.Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung. Ihr Wendepunkt ist W(-1 / 2).
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel !

lin.Gleichungssysteme

Funktionale Betrachtungen:
u.a. Graphische Differentiation / Integration
Verständnis von f ' bzw. f ''

Schaubildskizze qualitativ

8. Die Funktionen f_1, f_2 und f_3 haben die folgenden Schaubilder:
a) Skizzieren Sie in einem jeweils neuen Koordinatensystem die Schaubilder der Ableitungsfunktionen.



12. h ist eine für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion.
Nebenstehend ist für $-1{,}5 \le x \le 3$ das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion h' dargestellt.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen über die Funktion h richtig, falsch oder unentscheidbar sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.
(1) An der Stelle $x = -1$ hat das Schaubild von h einen Tiefpunkt.
(2) $h(x) > 0$ für $0 \le x \le 3$.
(3) An der Stelle $x = 0$ hat das Schaubild von h eine Tangente, die parallel ist zur Geraden mit der Gleichung $y = x - 7$.
(4) h ist streng monoton wachsend für $-1{,}5 \le x \le 0$.

Eigenschaften aus Schaubild

Funktionale Betrachtungen:
u.a. Interpretation charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Schaubilde
Elemente der Kurvendiskussion
Kenntnis wichtiger Funktionstypen

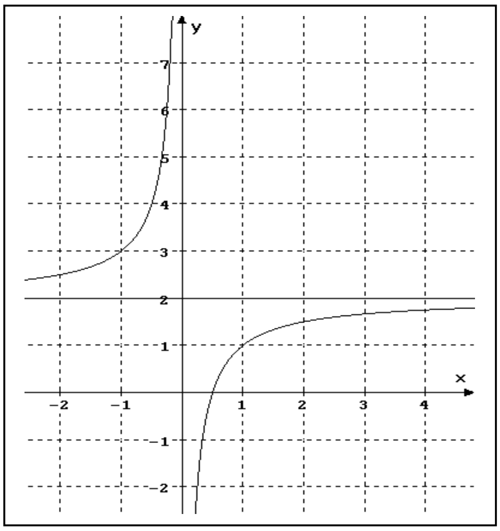
14. Zeigen Sie, dass das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt hat.

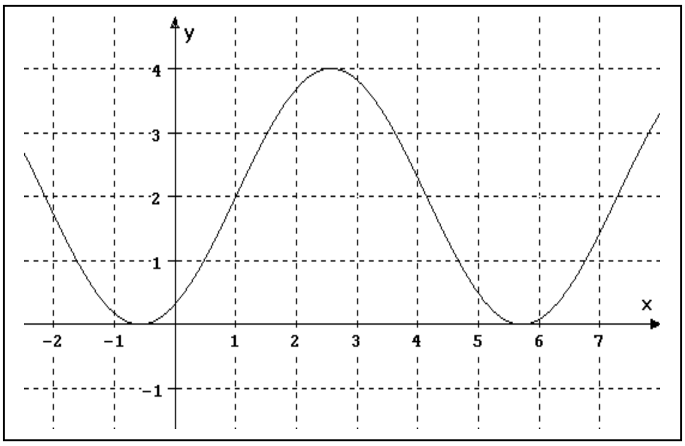
einfache Elemente der Kurvendiskussion

Funktionale Betrachtungen:
Kenntnis wichtiger Funktionstypen
Translation (horizontal, vertikal)
Auffinden des Funktionsterms bei gegebenem Schaubild

Erkennen von Eigenschaften

16. Geben Sie zu den skizzierten Schaubildern jeweils einen möglichen Funktionsterm an.





Funktionale Betrachtungen:
u.a. Verständnis
Kenntnis von Begriffen, Definitionen (Ableitung, Monotonie,...)

19. Geben Sie eine Definition der Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 an.

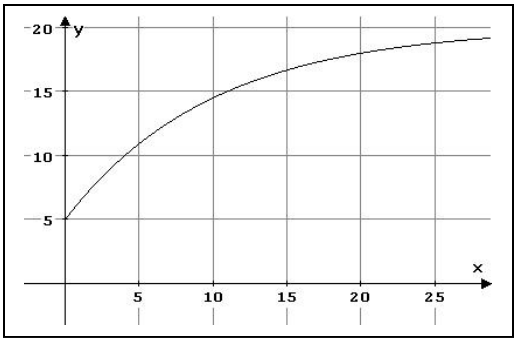
Definitions-
kenntnis

Anwendungen
u.a. Ableitung im Zusammenhang mit Tangentensteigung, Änderungsrate, Extremwertaufgaben
Integral im Zusammenhang mit Flächenberechnungen, Wirkung, Mittelwertbildung

20. Ein 60m langer Zaun soll ein möglichst großes rechteckiges Gartengrundstück so umgeben, dass 2m für die Einfahrt frei bleiben.
Wie müssen die Seitenlängen des Rechtecks festgelegt werden?

Bearbeitungsprinzip von Extremwertaufgaben

23. Nimmt man ein Glas mit einer Flüssigkeit aus dem Kühlschrank, so erwärmt sich die Flüssigkeit. Durch $f(x) = 20 - 15e^{\left(-\frac{1}{10}x\right)}; x \geq 0$ (x in Minuten, f(x) in Grad Celsius) wird ein solcher Erwärmungsvorgang beschrieben.



a) Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote. Welche Bedeutung hat die Asymptote für den Erwärmungsvorgang ?
b) Zu welcher Zeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Flüssigkeit erwärmt, am größten ?
c) Berechnen Sie für die ersten 10 Minuten die Durchschnittstemperatur.

wesentliche Elemente von anwendungsorientierten Aufgaben

Gleichungslehre:
u.a. Gauß-Verfahren (ohne Formvariablen, verschiedene Lösungsräume)

2. a) Untersuchen Sie das folgende lineare Gleichungssystem auf Lösbarkeit:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

b) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Gauß-Verfahren
Verständnis

Grundkenntnisse zu Geraden/Ebenen:
u.a. Gleichungen von Ebenen und Geraden
Skizze des Schaubilds einer Ebene bzw. Gerade im 3D-Koordinatensystem
Auffinden einer entsprechenden Gleichung für Ebene bzw. Gerade, wenn Skizze gegeben
Lagebeziehungen
Gerade-Gerade, Gerade-Ebene, Ebene-Ebene

8. Gegeben sind vier Ebenen E, F, G und H mit

$$E: -4x_1 + 12x_2 - 8x_3 = 7$$
$$F: \quad x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$
$$G: \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$H: \quad 2x_1 + 5x_2 = 6$$

einfache Lagebeziehungen

a) Welche besondere Lage haben die Ebenen E und F zueinander?
Wie erkennen Sie dies an den Koordinatengleichungen?
Wie wäre die rechte Seite in der Gleichung von E abzuändern, damit E und F identische Ebenen wären?

b) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen F und G.

c) Welche besondere Lage hat die Ebene H im Koordinatensystem?

9. Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}; \quad r \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0.$$

a) Welche geometrische Bedeutung haben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{u}$ bzw. $(\vec{x} - \vec{p})$ und $\vec{n}$?
Veranschaulichen Sie Ihre Antwort mithilfe einer Skizze.

Verständnis der verwendeten Größen

b) Welche Beziehungen müssen für die in den Gleichungen vorkommenden Vektoren gelten, damit
i) g parallel zu E ist ?
ii) g senkrecht zu E verläuft ?

13. Welche Punkte der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ haben von der Ebene $E: x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 1$ den Abstand 13 ?

einfache Abstandsberechnung