

Mathematik ohne Grenzen

ein internationaler Wettbewerb für Klassenstufe 10 und 11

Probewettbewerb 2000/2001

Für jede Aufgabe, auch für die nicht bearbeiteten, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben. Bei allen Aufgaben muss die Lösung begründet oder erläutert werden. Die Sorgfalt der Ausführung wird mitbewertet. Auch Teillösungen werden berücksichtigt.

**Aufgabe 1
7 Punkte**

Trick 17

Die Lösung soll in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

Geneviève montre un tour de magie à son amie Anne. Dos tourné, elle lui dit :

« Dispose en ligne droite 13 jetons numérotés de 0 à 12 en les plaçant dans l'ordre décroissant de leurs valeurs de gauche à droite.

Retourne-les pour masquer leurs valeurs.

Rajoute sur la même ligne, à droite de ceux déjà placés, 12 autres jetons choisis au hasard, leurs valeurs étant cachées.

Enfin déplace à gauche de la ligne un certain nombre de ces 12 derniers jetons ».

Geneviève se retourne alors et voit une ligne de 25 jetons tous identiques. Elle en prend un seul qui lui indique le nombre de jetons déplacés par Anne.

Expliquer le tour de magie.

Genevieve shows her friend Anne a magic trick. With her back to Anne, she gives her the following instructions :

« Lay out 13 tokens numbered 0 to 12 in a straight line, setting them in decreasing order from left to right

Then turn them face down to hide the numbers written on them.

To the right of those already laid out but along the same line, add twelve more tokens picked at random with their faces down.

End by moving to the left end of the line some of the tokens that have just been added. »

Genevieve then turns round, facing a line of 25 identical tokens. She picks one and it tells her how many tokens have been moved by Anne.

Explain what the trick is.

Genoveffa mostra alla sua amica Anna un gioco di magia. Con le spalle girate le dice :

« Allinea 13 gettoni numerati da 0 a 12 sistemandoli con valore decrescente da sinistra a destra.

Girali per nascondere i loro valori.

Aggiungi sulla stessa linea, alla destra di quelli già sistemati, 12 altri gettoni scelti a caso essendo i loro valori nascosti.

Infine, sposta a sinistra della linea un certo numero di questi ultimi 12 gettoni ».

Genoveffa si gira, quindi, e vede una linea di 25 gettoni tutti identici. Ne prende uno solo che le indica il numero dei gettoni spostati da Anna.

Spiegare questo gioco di magia.

Genoveva le enseña un truco de magia a su amiga Ana. De espaldas a ella, le dice :

« Pon en una línea recta 13 fichas numeradas de 0 a 12,

colocándolas en orden decreciente de su valor y de izquierda a derecha.

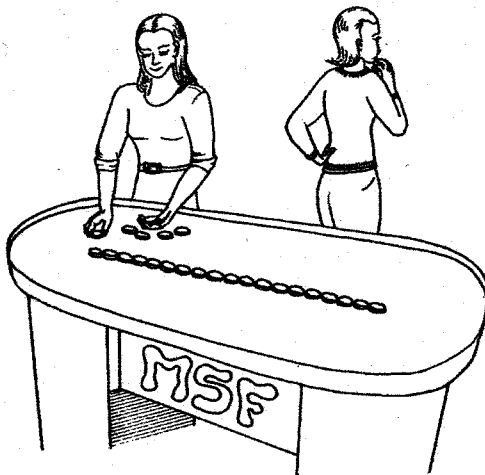
Ponlas cara abajo para que no se pueda ver el valor de cada una.

A la derecha de las fichas ya colocadas y en la misma línea, pon otras 12 fichas, elegidas por azar y también cara abajo.

Por fin, desplaza a la izquierda de la línea algunas fichas sacadas de entre éstas últimas. »

Genoveva se vuelve y ve una línea de 25 fichas idénticas. No saca más que una ficha y esta ficha le indica el número de fichas desplazadas por Ana.

Explicar el truco de magia.



Aufgabe 2
5 Punkte

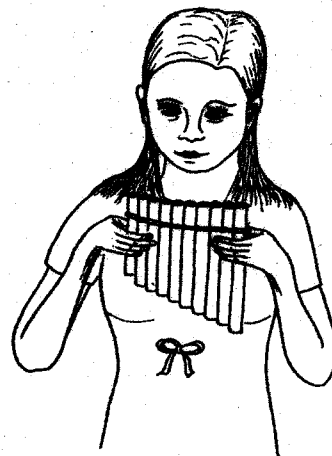
Hast du Töne ?

Aurelie möchte eine Panflöte aus 10 Röhren herstellen. Sie soll die 10 aufeinanderfolgenden Töne c, d, e, f, g, a, h, c', d', e' umfassen. Die Röhre mit dem tiefsten Ton ist 16 cm lang.

Wenn sie die Länge einer beliebigen Röhre halbiert, so ergibt sich ein Ton, der eine Oktave höher klingt. Verkürzt sie die Röhre auf $\frac{2}{3}$ der ursprünglichen Länge, so ergibt sich ein Ton, der eine Quinte höher klingt, aus c wird zum Beispiel g und aus d wird a.

Berechne die Längen der Röhren, ohne bei der Rechnung den angegebenen Tonbereich zu verlassen. Ordne sie nach der Tonleiter.

Stelle die Panflöte auf dem Antwortblatt im Maßstab 1:1 dar. Wähle als Rohrdurchmesser 1 cm.



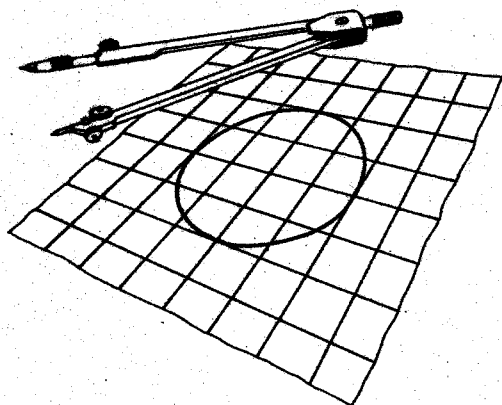
Aufgabe 3
7 Punkte

Im Dutzend

In ein quadratisches Gitternetz zeichnet man einen Kreis. Sein Mittelpunkt liegt auf einem Gitterpunkt, sein Radius ist doppelt so groß wie der Abstand zweier benachbarter Gitterlinien.

Der Kreis schneidet die Gitterlinien in 12 Punkten. Diese bilden die Ecken eines Zwölfecks.

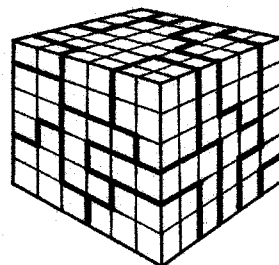
Ist dieses Zwölfeck regelmäßig? Begründe.



Aufgabe 4
5 Punkte

Kubismus

In der Würfelwelt sind selbst die Planeten würfelförmig. Auf dem beigefügten Blatt findest du die Weltkarte eines Würfelplaneten, dessen Seitenflächen jeweils von 36 gleich großen Quadraten bedeckt sind. Die dick eingezeichneten Linien sind die Grenzen der Länder auf diesem Planeten. Die Kanten des Würfels fallen nicht mit einer Grenze zusammen.



Male die Weltkarte mit möglichst wenigen Farben aus, Land 1 mit schwarz, Land 2 mit grün, Land 3 mit blau und so weiter.

Zwei benachbarte Länder müssen stets verschiedenfarbig sein. Addiert man die Flächeninhalte aller Länder derselben Farbe, so muss dieser Wert für alle Farben gleich sein.

Schneide die Karte aus, und klebe sie auf das Antwortblatt. (Die zweite Karte ist zum Ausprobieren.)

Aufgabe 5
7 Punkte

Achter Schwierigkeitsgrad

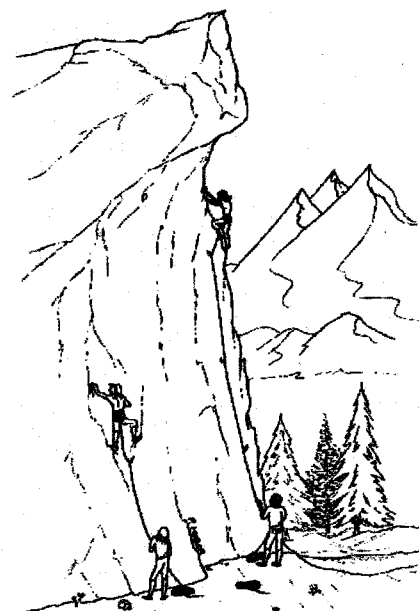
Ein Verkäufer von Kletterseilen verwendet zum Abmessen einen Tisch, dessen eine Kante genau 1 m lang ist.

Beim Messen führt er folgende Operationen durch: Abmessen der Länge 1m, Verlängern oder Verkürzen um 1 m, Verdoppeln der Länge.

Anaïs benötigt ein Seil von 44 m Länge, das Seil für Barbara soll 63 m und das für Claudius 72 m lang sein.

Der Verkäufer misst jedes der Seile einzeln ab. Dabei führt er immer genau acht der genannten Operationen aus.

Beschreibe, wie er jedes Mal vorgehen muss.

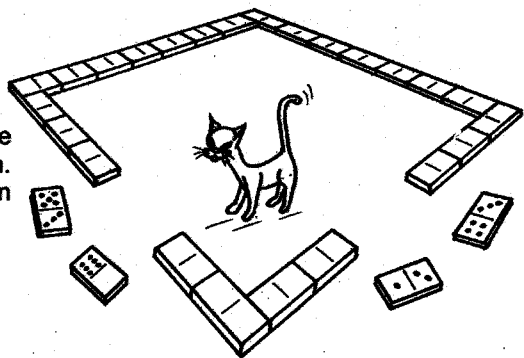


Aufgabe 6
5 Punkte

Magisches Domino

Annamaria legt die 28 Steine eines Dominospiels so aneinander, dass sie die Seiten eines Quadrats bilden. Sie beachtet nicht die Dominoregeln. Zum Schluss hat die Summe der Augenzahlen bei allen Quadratseiten denselben Wert.

Zeichne eine solche Anordnung auf.



Aufgabe 7
7 Punkte

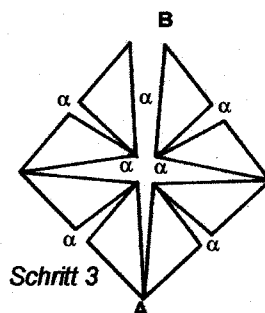
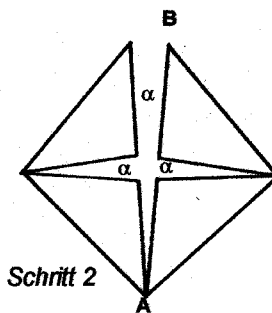
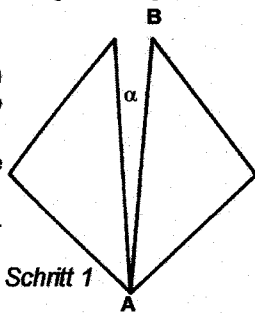
Lungenflügelfraktal

Ein Fraktal ist eine geometrische Figur, in deren Teilen sich in verkleinertem Maßstab die Struktur der Gesamtfigur wiederfindet.

Die Abbildung zeigt die ersten drei Schritte zur Konstruktion des Lungenflügelfraktals.

Alle Dreiecke sind gleichschenkelig und besitzen die gleichen Winkel.

Es sei $\alpha = 12^\circ$ und $\overline{AB} = 15$ cm.



Berechne die Winkel der Dreiecke und konstruiere das Fraktal bis zum vierten Konstruktionsschritt.

Aufgabe 8
5 Punkte

Bug

Mein Taschenrechner spinnt! Wenn ich auf die Taste mit der Null drücke, zeigt er die Ziffer 1 an. Drücke ich auf die Taste mit der Eins erscheint die Zwei, drücke ich die Taste mit der Zwei, erscheint die Drei. Und so geht es weiter. Drücke ich schließlich die Taste mit der Neun, so erscheint die Null.

Alle anderen Tasten funktionieren normal. Wenn ich zum Beispiel $12 + 34$ berechnen möchte, so zeigt mein Rechner $23 + 45$ an und liefert als Ergebnis 68.

Trotzdem kann es bei manchen Additionen vorkommen, dass die angezeigte Summe mit der Summe der ursprünglich eingetippten Zahlen übereinstimmt.

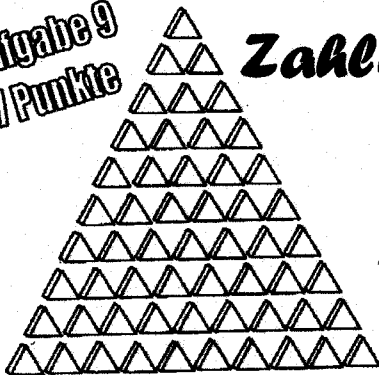
Gib ein Beispiel für eine solche Addition an.

Erkläre.



Aufgabe 9
7 Punkte

Zahlenberg



Bilde aus den 10 Ziffern des Zehnersystems nacheinander zehn natürliche Zahlen.

Die erste Zahl soll einstellig, die zweite Zahl zweistellig sein und so fort, bis du schließlich eine zehnstellige Zahl erhältst.

Die nachfolgende Zahl soll immer so gebildet werden, dass vorne oder hinten eine andere der zehn Ziffern hinzugefügt wird. Jede Zahl soll durch die Anzahl ihrer Ziffern teilbar sein.

Aufgabe 10
10 Punkte

Wie man es dreht und wendet

Clown Alex besitzt eine Jacke, die außen rot und innen blau ist. Er schneidet aus dem Stoff ein rechtwinkliges Dreieck aus und versucht, das entstandene Loch mit dem gewendeten Dreieck wieder zu schließen, so dass er außen ein blaues Dreieck auf rotem Hintergrund erhält.

Enttäuscht stellt er fest, dass dies bei seinem Dreieck nicht möglich ist. Als er sein Dreieck jedoch zerschneidet, gelingt es ihm. Er findet schließlich heraus, dass man auch ein beliebiges Dreieck ausschneiden und entsprechend wenden kann.

Gib eine geeignete Zerlegung zunächst für ein rechtwinkliges und dann für ein beliebiges Dreieck an. Begründe.



Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Fußproblem

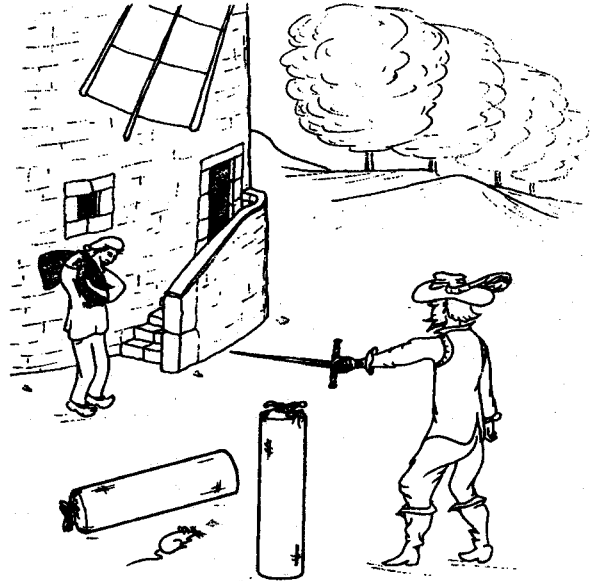
Jacques, der Musketier, bestellt bei Müller Tudor einen Sack Weizen, zylinderförmig, 4 Fuß hoch und mit einem Umfang von 6 Fuß.

Der Müller bietet ihm statt dessen 2 Säcke an, auch zylinderförmig und 4 Fuß hoch, aber mit 3 Fuß Umfang. Er behauptet, dies sei die gleiche Menge Weizen.

Jacques kann rechnen, zieht seinen Degen und richtet ihn auf den Müller.

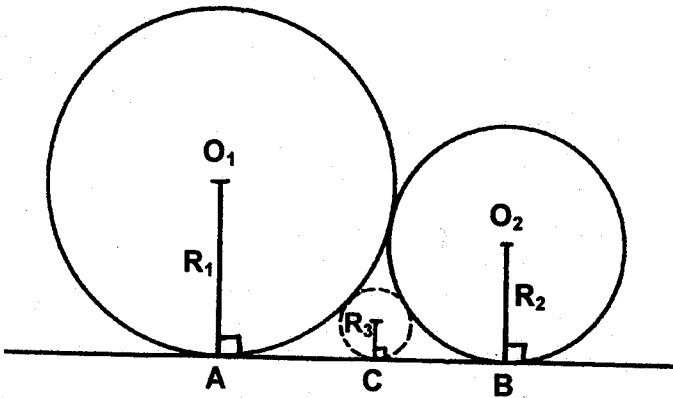
Erkläre dieses Verhalten mathematisch.

(nach Jacques Ozanam (1640 - 1717), Autor einer Sammlung mathematischer Zerstreungen).



Aufgabe 12
7 Punkte

Made in Japan



Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus einer bemalten Holztafel. Sie stammt aus der japanischen Provinz Gumma und wird auf das Jahr 1824 datiert.

Man sieht drei Kreise mit den Radien R_1 , R_2 und R_3 . Sie berühren sich gegenseitig und besitzen die Gerade (AB) als gemeinsame Tangente.

Es sei $R_1 = 9$ cm, $R_2 = 4$ cm und $\overline{AB} = 12$ cm.

Berechne den Radius R_3 des kleinen Kreises.

Aufgabe 13
10 Punkte

Hoch wie viel?

Eliane findet mit Hilfe ihres Taschenrechners eine Potenz von 2000. Sie ergibt ausgeschrieben eine Zahl mit genau 100 Ziffern.

Eliane fragt sich, ob es wohl eine Potenz von 2000 gibt, welche im Zehnersystem durch eine Zahl mit genau 1000 Ziffern dargestellt wird.

Gib die Potenz von 2000 an, die Eliane zuerst gefunden hat.

Beantworte dann Elianes Frage und begründe die Antwort.

