

Mathematik ohne Grenzen

Probewettbewerb 1994/95

Für jede Aufgabe ist ein gesondertes Lösungsblatt zu verwenden.

Bei den Aufgaben 3, 6, 8, 10, 11 und 13 genügt die Angabe der Lösung.

Bei allen anderen Aufgaben muß die Lösung begründet werden.

Die Sorgfalt der Darstellung wird in die Bewertung einbezogen.

Auch unvollständige Lösungen werden bei der Korrektur berücksichtigt.

Aufgabe 1 10 Punkte

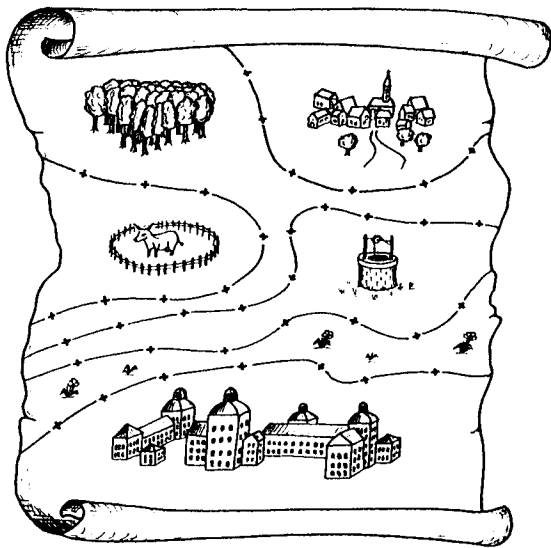
Mathematik mit Grenze

Le baron de Münchhausen fut remercié de ses exploits par l'attribution de terres. Il fit faire un plan sur lequel furent dessinés son château et la frontière séparant sa propriété de celle du roi. Le Géomètre Royal confirma l'exactitude de ce plan.

Lors d'une révolte de paysans, le château fut incendié et il ne resta plus que le document ci-contre.

D'après ce fragment de carte, les villageois prétendent que leur village n'appartient pas au domaine du baron et ils refusent maintenant de lui payer l'impôt. Le baron est d'un avis contraire.

Qui a raison? Expliquer la réponse.



Aufgabe 2 5 Punkte

Gedächtnislücke

Chantal hat die drei Ziffern des Fahrradschlösses vergessen, das ihr ihre Freundin geliehen hat. Sie wappnet sich also mit Geduld und beginnt, systematisch alle Möglichkeiten durchzuprobieren, um die richtige Kombination zu finden. Für eine Einstellung benötigt sie etwa zwei Sekunden, und es können alle Ziffern von 0 bis 9 vorkommen.

Ist es realistisch, daß Chantal die richtige Kombination in weniger als 30 Minuten herausfindet? Begründe deine Antwort.

Bearbeite diese Aufgabe in Französisch, Englisch, Italienisch oder Spanisch.

Baron Münchhausen was awarded land for his bravery. He had a map drawn up indicating his castle and the boundary separating his land from the King's. The Royal Surveyor confirmed that the map was correct.

During a peasants' revolt, after the castle was burnt to the ground, all that remained was the following document.

According to the fragment that was left, the peasants claim that their village doesn't belong to the Baron's estate and now they refuse to pay him any taxes. The Baron is of a different opinion...

Who is right? Explain your answer.

★★★★★

El barón de Münchhausen recibió propiedades de terreno en agradecimiento por sus hazañas. Mandó hacer un plano en el que se dibujaron su castillo y la frontera que separaba su propiedad de la del Rey. El Geómetra Real confirmó la exactitud de dicho plano.

Durante una revuelta de paisanos, el castillo fue incendiado y al barón no le quedó más que el documento adjunto.

Según este fragmento de carta, los lugareños dicen que su pueblo no pertenece al dominio del barón y se niegan ahora a pagarle el impuesto. La opinión del barón es opuesta.

¿Quién tiene razón? Explica la respuesta.

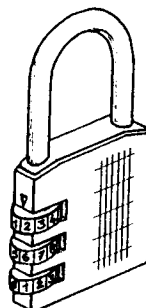
★★★★★

Il barone di Munchhausen fu ricompensato dei suoi successi con l'assegnazione di terreni. Egli fece predisporre una pianta con il disegno del suo castello e del confine tra la sua proprietà e quella del re. Il Geometro reale confermò l'esattezza della pianta.

A causa di una rivolta degli abitanti del villaggio il castello fu incendiato e non restò che il documento qui a lato.

In base a questo frammento di carta i paesani ritenevano che il loro villaggio non appartenesse alla proprietà del barone e si rifiutarono di pagarli l'imposta. Il barone era di parere contrario.

Chi aveva ragione? Si spieghi la risposta.



Aufgabe 3
10 Punkte

Goldstück

Glanzvolle Ergebnisse verdienen glanzvolle Geschenke, denkt sich ein Mathematiklehrer und schenkt seiner Tochter zur bestandenen Prüfung einen Goldanhänger in Form einer Kreiskonchonoide.

Hier eine Beschreibung, wie sich die Form des Anhängers konstruieren läßt:

- Wähle auf einer Kreislinie mit dem Radius $r = 3,5$ cm einen festen Punkt A.
- Sei B ein beliebiger anderer Punkt der Kreislinie, der zusammen mit A eine Gerade (AB) festlegt. Wähle auf dieser Geraden symmetrisch zu B zwei Punkte P und P', welche von B den Abstand r haben.
- Bewegt sich der Punkt B nun auf dem Kreis, so bewegen sich P und P' auf einer Kurve, welche man Kreiskonchonoide nennt.

Konstruiere diese Kreiskonchonoide.

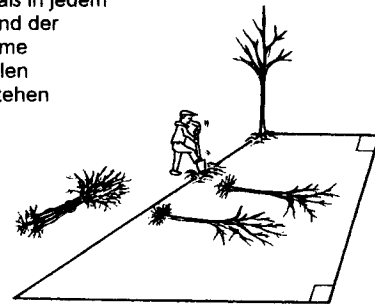
Aufgabe 4
5 Punkte

Grenzproblem

Ein Grundstück hat die Form eines rechtwinkligen Trapezes. Auf die Grenzlinie pflanzt man insgesamt 16 Bäume, so daß in jedem Eckpunkt ein Baum steht und der Abstand benachbarter Bäume jeweils 10 m beträgt. Auf allen vier Seiten des Trapezes stehen verschieden viele Bäume.

Wie lang sind die Seiten dieses Grundstücks?

Begründe.



Aufgabe 5
10 Punkte

"Kopflös" ist keine Lösung

In einem fernen Land leben schreckliche Drachen mit mehreren Köpfen und mehreren Schwänzen. Ein mutiger Ritter kann einem solchen Drachen mit einem einzigen Schwertstreich einen oder zwei Köpfe abschlagen oder aber auch mit einem Hieb einen oder zwei Schwänze vom Körper abtrennen.

Aber ach, die Drachen haben Zauberkräfte. Entledigt man sie eines Kopfes, wächst sofort ein neuer nach. Schlägt man einen Schwanz ab, wachsen augenblicklich zwei neue Schwänze nach. Schafft man es, zwei Schwänze abzuschlagen, so wächst dafür ein neuer Kopf.

Nur wenn es gelingt, zwei Köpfe abzuschlagen, wächst nichts nach.

Ein Drache ist erst tot, wenn er weder Kopf noch Schwanz besitzt,

Wie muß der Ritter vorgehen, um einen Drachen mit fünf Köpfen und sieben Schwänzen zu töten?

Gibt es unsterbliche Drachen? Welche?



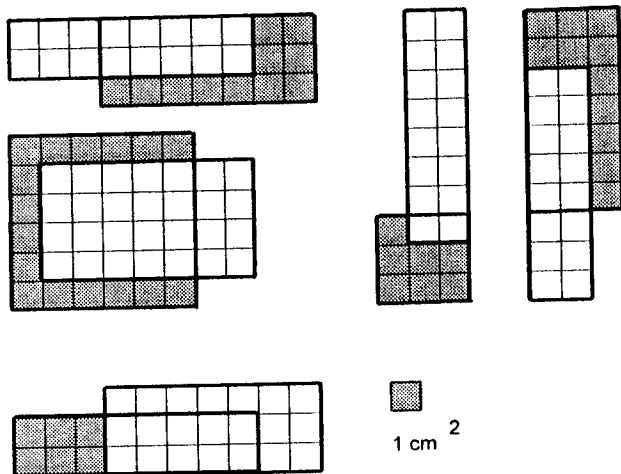
Aufgabe 6
5 Punkte

Doppeldecker

Die fünf Teile eines Puzzles werden jeweils aus zwei übereinandergeklebten Rechtecken gebildet (siehe Abbildung). Jedes Teil besteht also aus zwei Schichten gleicher Dicke.

Stelle die fünf Teile her und füge sie so zusammen, daß zwei übereinanderliegende Quadrate von 10 cm Seitenlänge entstehen.

Klebe die Anordnung auf das Antwortblatt.



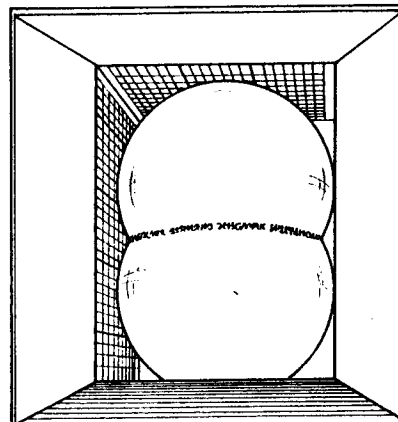
Aufgabe 7
10 Punkte

Zukunftsträume

La Grande Arche ist ein Bauwerk im Pariser Vorort La Defense, welches von seinen Erbauern als Symbol der Hoffnung und der Hinwendung zur Zukunft geplant wurde. Das Bauwerk ist ein monumentales Tor mit quadratischem Grundriß und einer riesigen quaderförmigen Öffnung. Die Seite der inneren quadratischen Grundfläche mißt 70 m, die innere Höhe beträgt 90 m.

Es scheint jedoch, daß die große Leere dieser Toröffnung bei manchen Leuten Angstgefühle hervorruft. Ein Architekt hat daher den Vorschlag unterbreitet, den Hohlraum mit zwei riesigen Ballons zu füllen, welche die Form zweier sich schneidender Kugeln besitzen und die vier Innenseiten des Bauwerks in sechs Punkten berühren. Auf dem Rand des Schnittkreises der beiden Kugeln soll eine Botschaft der Brüderlichkeit angebracht werden.

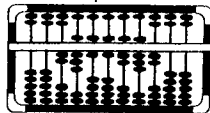
Berechne den Durchmesser dieses Schnittkreises.



Aufgabe 8
5 Punkte

Abakus

Der Abakus ist ein Rechengerät mit verschiebbaren Holzkugeln, das in China noch heute benutzt wird. Neben Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen können damit sogar Divisionen und die Berechnung von Quadratwurzeln durchgeführt werden.



Der abgebildete Abakus zeigt die Zahl 286678200.
Zeichne einen Abakus, welcher die Zahl 31415926 anzeigt.

Aufgabe 10
5 Punkte

Online

Als Bill endlich die Verbindung zu einer Mailbox hergestellt hat, erscheint auf dem Monitor seines Computers plötzlich eine Zahlenfolge. "Für einen Hacker kein Problem", meint er nach kurzer Zeit. "Man hat einfach zu den Platznummern der einzelnen Buchstaben im Alphabet immer dieselbe Zahl addiert."

Schreibe die entzifferte Nachricht auf das Antwortblatt.

Durchschnittlich

Aufgabe 9
10 Punkte

Zeichne auf das Antwortblatt ein beliebiges Dreieck und eine seiner Seitenhalbierenden.

Zeige, daß das Dreieck durch die Seitenhalbierende in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegt wird.

Wie kann man das eine Teildreieck so in zwei Stücke zerschneiden, daß sich aus diesen beiden Stücken das andere Teildreieck zusammensetzen läßt. Zeichne die Schnittlinie in das vorhandene Dreieck ein.

Führe die beschriebene Teilung mit einem zweiten Dreieck durch. Setze das eine Teildreieck aus den Teilstücken des anderen zusammen und klebe die Anordnung unter die erste Zeichnung.

18-23 30-23-28-14-27-14-27 17-14-30-29-18-16-14-23
32-14-21-29 13-18-14 31-24-23 14-33-29-27-14-22-14-27
16-14-16-14-23-28-14-18-29-18-16-14-27
10-11-17-10-14-23-16-18-16-20-14-18-29
11-14-17-14-27-27-28-12-17-29 32-18-27-13
20-10-23-23 13-14-27 14-18-23-35-14-21-23-14
13-18-14 22-14-18-28-29-14-23
25-27-24-11-21-14-22-14 23-18-12-17-29
10-21-21-14-18-23-14 21-24-14-22-14-23
13-10-21-10-18 21-10-22-10

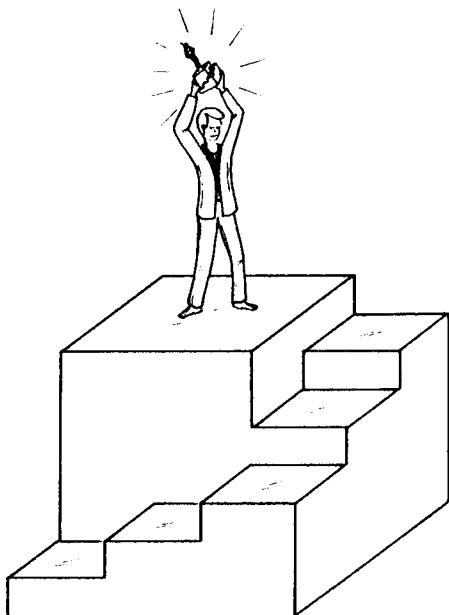
Aufgabe 11
10 Punkte

Siegetreppchen

Der im Schrägbild dargestellte Körper ist das Modell eines Podiums. Das Modell ist 6 cm hoch und besitzt eine quadratische Grundfläche mit 7,5 cm Seitenlänge. Die Stufen sind ebenfalls quadratisch mit einer Seitenlänge von 2,5 cm und sind 1 cm hoch.

Zeichne ein zusammenhängendes Netz dieses Podiums. Das Netz soll aus einem einzigen Stück bestehen und ohne zu überlappen auf ein DIN A4-Blatt passen.

Schneide das Netz aus und klebe es auf das Antwortblatt.



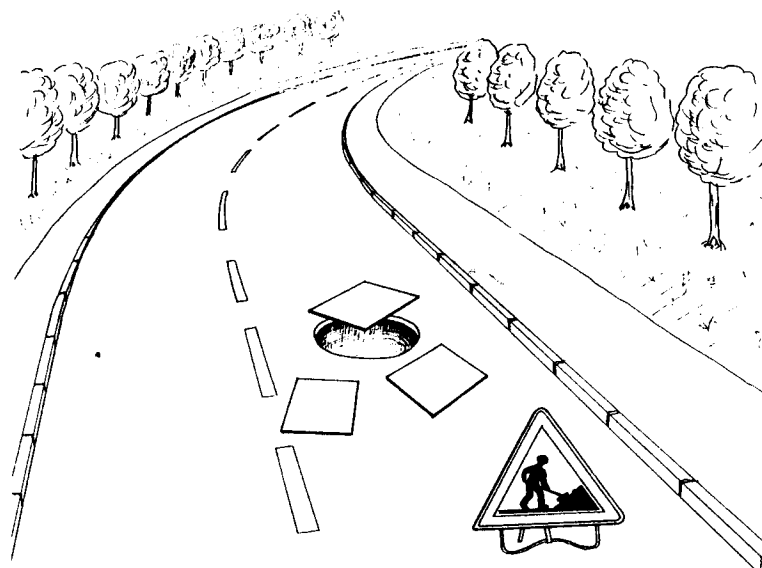
Aufgabe 12
15 Punkte

Vorsicht Baustelle

Vor Feierabend müssen die Arbeiter einer Baustelle eine kreisförmige Kanalöffnung abdecken. Sie verwenden dazu quadratische Platten von 1 m Seitenlänge.

Zwei Platten sind zu wenig, aber drei Platten reichen genau aus. Die Öffnung ist also der größte Kreis, welcher von drei Quadraten bedeckt werden kann, ohne daß sich die Quadrate überschneiden.

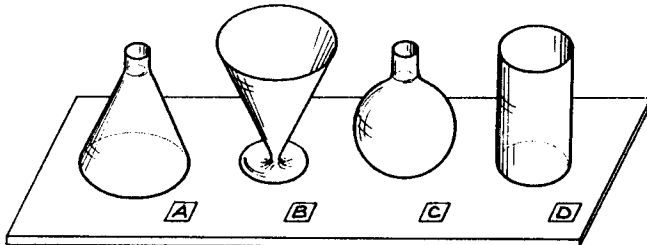
Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1:20 an und berechne den genauen Wert des Kreisdurchmessers.



nur für Klasse 11

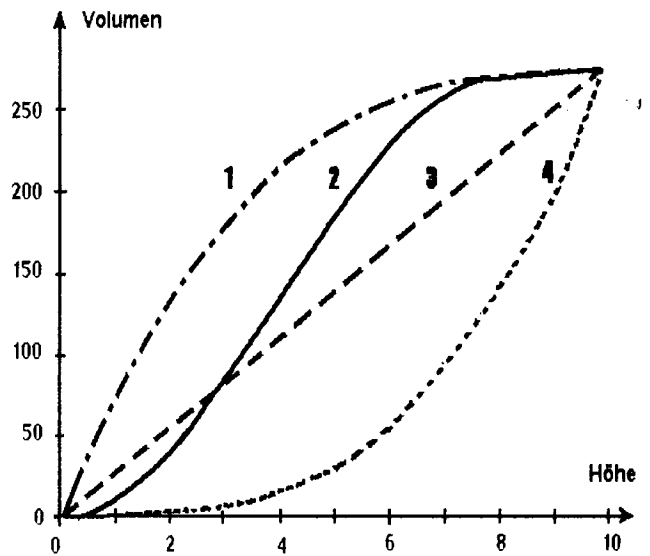
Aufgabe 13 5 Punkte

Volle Kanne



- A: Erlenmeyerkolben B: Kelchglas
C: Rundkolben D: Becherglas

Die abgebildeten Gefäße sind gleich hoch und enthalten, wenn sie randvoll sind, die gleiche Flüssigkeitsmenge. Die nebenstehenden Kurven repräsentieren für jedes Gefäß das Volumen der eingefüllten Flüssigkeit in Abhängigkeit von der Höhe des Flüssigkeitsspiegels. Ordne jeder Kurve das entsprechende Gefäß zu.



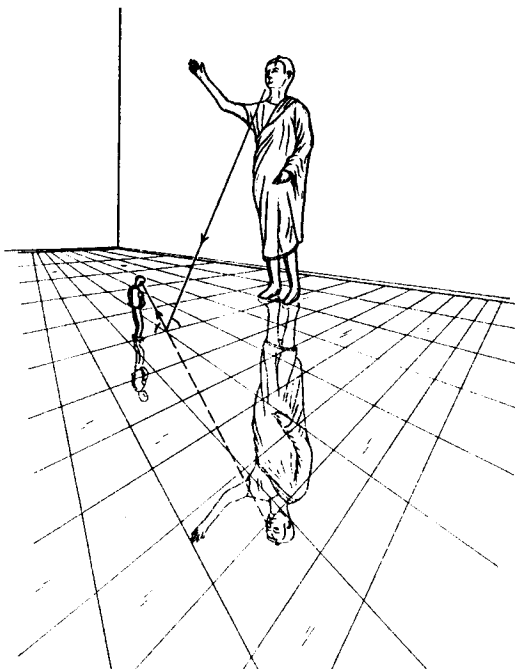
Aufgabe 14 10 Punkte

Reflexionen

"Die ist aber groß", denkt sich Rémy, als er vor der Statue von Thales steht. "Ich komme mir dagegen richtig klein vor."

Wenn man das Spiegelbild der Statue auf dem polierten Marmorboden betrachtet, müßte man ihre Höhe eigentlich berechnen können. Ich weiß, daß meine Augenhöhe 1,72 m beträgt. Das Spiegelbild des Kopfes endet gerade am Rand der dritten Marmorplatte, also drei Meter vom Fuß der Statue entfernt. Von meinen eigenen Fußspitzen bis zum Rand dieser Platte sind es 80 cm."

Berechne aus diesen Angaben die Höhe der Statue.



Aufgabe 15 15 Punkte

Sternpolygon

Zwischen dem Gelehrten Cosinus und einem seiner Schüler entwickelte sich folgendes Zwiegespräch:

"Meister, ich habe einen Weg gefunden, wie man ohne Winkelmesser ein regelmäßiges, neunseitiges Sternpolygon konstruieren kann."

"Wirklich mit gleichlangen Seiten?"

"Natürlich - und so gehe ich vor: Auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r wähle ich einen Punkt. Mit dem Zirkel trage ich, beginnend bei diesem Punkt, achtmal hintereinander eine Strecke der Länge $\frac{9}{7}r$ ab. So erhalte ich neun Punkte auf der Kreislinie, die Spitzen meines Sterns, und muß die entsprechenden Punkte nur noch verbinden."

"Du glaubst also wirklich, daß $\frac{9}{7}r$ die Seitenlänge eines regelmäßigen, neunseitigen Sternpolygons ist? - Erlaube, daß ich zweifle!"

Zeichne einen Kreis mit $r = 7$ cm und führe die Konstruktion des Schülers durch. Bestätige durch eine Rechnung die Zweifel des Meisters.

