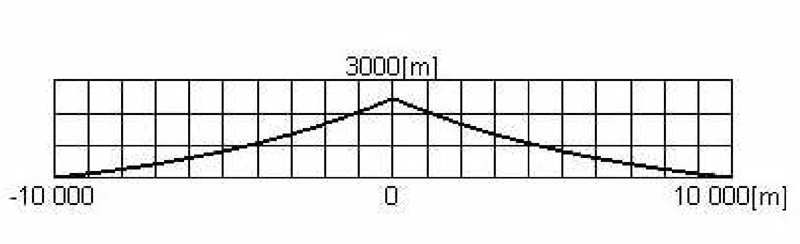
Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung **2002**   Leistungskurs **M a t h e m a t i k / CAS**   lokale Aufgabe **I 1**
H. Klopfer   Humboldt-Gymnasium Karlsruhe
Haupttermin   **Analysis**   Blatt 1 – 2

a) Der Vulkan Mayon auf den Philippinen ist ein perfekt rotationssymmetrischer Berg. Er ist 2460 m hoch und hat einen Grundkreisradius R = 10 km . Das folgende Schaubild zeigt das Profil des Berges.



Erstellen Sie mit einem geeigneten Ansatz im Bereich $0 \leq x \leq R$ eine Profilfunktion $p : x \to p(x)$ mit drei Parametern a,b,c ausgehend von einer Grundfunktion . Die Parameter sind an die Wertetabelle anzupassen.

x [m]	0	5000	10 000
y [m]	2460	820	0

Erweitern Sie die Funktion p zum Definitionsbereich $-R \leq x \leq R$ und untersuchen Sie die Differenzierbarkeit an der Stelle x = 0.
Berechnen Sie das Volumen des Berges.

b) Das Profil eines anderen Vulkan wird beschrieben durch $q(x) = \dfrac{10}{5+0.5x^2}$; $x \in \mathbf{R}$
Bei einem Ausbruch werden Gesteinsbrocken hochgeschleudert, deren Bahnkurven durch die Kurvenschar $x \to 2 + t\,x - k\,(1 + t^2)\,x^2$ beschrieben werden. Dabei ist k eine positive Konstante , für den Parameter t sind alle reellen Zahlen $\neq 0$ zugelassen.
Für jede Bahnkurve gilt $t\,x \geq 0$.

Zeichnen Sie die Kurvenschar für $k = \frac{1}{5}$ und t = -10 ... 10 , $t \neq 0$ zusammen mit dem Profil des Vulkans in einem Diagramm.
Berechnen Sie für beliebiges k und t den höchsten Punkt einer Bahnkurve.

Zeigen Sie : $2 + \frac{1}{4k}$ ist eine obere Schranke aller Bahnkurven.

Berechne Sie für beliebiges k die Hüllkurve der Kurvenschar.

Untersuchen Sie, ob für $k = \frac{1}{5}$ die Stelle $P\left(\frac{24}{7} \mid q\left(\frac{24}{7}\right)\right)$ von herabstürzenden Gesteinsbrocken getroffen werden kann.

Ergänzen Sie das Diagramm für $k = \frac{1}{5}$ durch die Hüllkurve .

c) Durch einen Vulkanausbruch wurde auf einer Insel der Lebensraum einer seltenen Vogelart zerstört. Nach einer gewissen Zeit setzten Biologen wieder 100 Vögel dieser Art aus. Für deren Populationswachstum wird die folgende Differenzialgleichung angesetzt. Dabei gibt p(t) die Anzahl der Tiere nach t Jahren der Aussetzung an.

$$p'(t) = \frac{2}{5}p(t) - \frac{1}{2500}p(t)^2$$

Bestimmen Sie die spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung mit der angegebenen Anfangsbedingung .
Nach wieviel Jahren ist der Bestand auf 400 Tiere angewachsen ?
In welchem Zeitraum ist die Wachstumsrate p'(t) zunehmend, bzw. abnehmend ?
Leider muss damit gerechnet werden, dass von Anfang an jährlich eine konstante Anzahl z der Vögel die Insel wieder verläßt . Wie lautet die abgeänderte Differenzialgleichnung ?
Berechnen Sie eine kritische Schranke für z, so dass bei Überschreitung die Population auf lange Sicht wieder zusammenbricht .