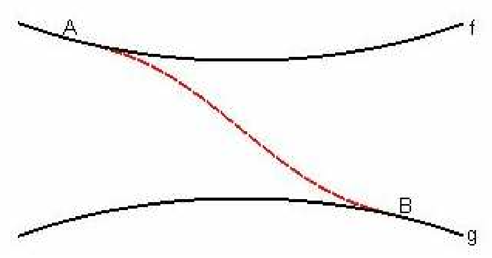
Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung 2002 — Leistungskurs **Mathematik / CAS** — lokale Aufgabe **I 2**
H.Klopfer — Humboldt-Gymnasium Karlsruhe
Haupttermin — **Analysis** — Blatt 1 – 2

a) Zwei Schnellbahntrassen werden beschrieben durch die Graphen der Funktionen

$$f : x \to \mathbf{e}^{\frac{x}{4}} + \mathbf{e}^{-\frac{x}{4}} \quad \text{und} \quad g : x \to -f(x)$$



Vom Punkt A (- 3 | f(-3)) der Trasse f soll ein glatter Übergang zum Punkt B (3 | g(3)) der Trasse g konstruiert werden. (siehe Skizze)
Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades, welche diese Bedingung erfüllt .
Die Symmetrie der Situation ist zu beachten !
Mit welcher zulässigen Höchstgeschwindigkeit kann diese Quertrasse von A nach B durchfahren werden ?
Die Formel v_{max} [km/h] = $3{,}6\sqrt{0{,}65\, R[m]}$ gibt an, mit welcher Maximalgeschwindigkeit eine Stelle der Bahnkurve mit Krümmungsradius R passiert werden kann .
In der obigen Darstellung gilt 1 LE = 100 m .

b) Durch die Gleichungen

$$x(t) = 2 \bullet (1 + \cos(t)) \quad ; \quad y(t) = \sin(t) \bullet (1 + \cos(t))$$

mit $t \in [0 ; 2\pi]$ wird eine Kurve K in Parameterform beschrieben.
Zeichnen Sie diese Kurve.
Welchen Abstand haben 2 Kurvenpunkte mit gleicher x-Koordinate höchstens ?
Zeigen Sie , dass diese Kurve auch durch die Gleichung

$$16\, y^2 = 4\, x^3 - x^4$$

dargestellt werden kann.
Bestimmen Sie den Inhalt A der von K berandeten Fläche .
In die Kurve soll eine Kreis mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden.
Beschreiben Sie die Lage dieses Kreises und berechnen Sie dessen Flächeninhalt als Bruchteil von A. Ergänzen Sie das Schaubild der Kurve durch den Kreis.

Fortsetzung Blatt 2

c) Ein kleiner See enthält 5000 m^3 Wasser. Über einen Zufluss A gelangt Wasser mit einer Fließgeschwindigkeit von 8 $\frac{m^3}{\text{min}}$ in den See und über einen Abfluss B verlässt die gleiche Menge Wasser pro Minute den See.
Infolge eines Unfalls wird über einen Zeitraum von einer halben Stunde eine Menge G = 20 m^3 einer giftigen Substanz über den Zufluss A in den vorher sauberen See eingeleitet.
Es sei $c(t) = \frac{G(t)}{V}$ die Konzentration des Giftes zum Zeitpunkt t .
Dabei ist G(t) die aktuelle Giftstoffmenge im See und V die konstante (!) Wassermenge des Sees. Es wird angenommen, dass sich die Giftmenge gleichmäßig im See verteilt.

Stellen Sie eine DGL für die Funktion c(t) auf und bestimmen Sie die für die obige Situation spezielle Lösung.
Berechnen Sie den Maximalwert von c(t) und den zugehörigen Zeitpunkt.
Nach welcher Zeit seit Beginn der Einleitung sinkt c(t) unter den unkritischen Wert von 0,05 % ?