Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung **2002** Grundkurs **Mathematik** Aufgabe **I**

Haupttermin

Schulversuch mit einem Kleinrechner mit einem Computer-Algebra-System

Zu jedem $t \in \mathbf{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = (x^2 - t) \cdot e^x; \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) Bestimmen Sie für $t = 2$ die Schnittpunkte mit der x-Achse, die Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie die Asymptote des Schaubildes K_2.
Berechnen Sie für $t > 0$ die Schnittpunkte mit der x-Achse sowie Hoch-, Tief- und Wendepunkte in Abhängigkeit vom Parameter t.
Geben Sie in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbf{R}$ die Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen an.
Auf welcher Ortskurve liegen die Tiefpunkte für $t > -1$?

b) Welchen Inhalt hat für $t = -1$ die Fläche, die von dem Schaubild K_{-1}, der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x = -2$ begrenzt wird?
Nähern Sie diese Fläche durch ein geeignetes Trapez an und berechnen Sie dessen Inhalt.
Wie groß ist der prozentuale Fehler bezüglich der exakt berechneten Fläche?
Für $t \le 0$ schließen K_t, die x- und die y-Achse und die Gerade $x = u$ mit $u < 0$ eine Fläche mit dem Inhalt $A(u)$ ein. Berechnen Sie $A(u)$ und $\lim\limits_{u \to -\infty} A(u)$.

c) Gegeben ist eine Funktion g mit $g(x) = (x^2 - a) \cdot e^{b \cdot x}$; $a, b \in \mathbf{R}$.
Das Schaubild G der Funktion g geht durch die Punkte $P(0|-2)$ und $Q(-1|-\frac{1}{e})$.
Bestimmen Sie a und b.
Bei Rotation der Fläche, die vom Schaubild G, der x-Achse, den Geraden $x = -1$ und $x = 1{,}3$ begrenzt wird, um die x-Achse entsteht ein Körper, der an ein „Glasfläschchen“ erinnert.
Das Schaubild $K_{1,5}$ begrenzt bei Rotation um die x-Achse für $-1 \le x \le x_0$ (x_0 ist Nullstelle von $K_{1,5}$) den Hohlraum des „Glasfläschchens“.
Welches Volumen hat das Glas und welches Volumen hat der Hohlraum?
Nun soll noch ein waagrechter Flaschenhals der Länge 1 an der Öffnung des "Glasfläschchens" angesetzt werden.
Berechnen Sie das für den Flaschenhals benötigte Glasvolumen.

Punkteverteilung: a) 12 VP b) 9 VP c) 9 VP