Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung **2002** Leistungskurs **Mathematik** Aufgabe **I**

Haupttermin

Schulversuch mit einem Kleinrechner mit einem Computer-Algebra-System

Für jedes $t \in \mathbf{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x)=(x^2-t)\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Das Schaubild von f_t sei K_t.

a) Untersuchen Sie das Schaubild K_2 auf Symmetrie, Asymptoten, Achsenschnittpunkte und Extrempunkte.
Auf welcher Kurve liegen die Hochpunkte der Funktion f_t mit $t \geq -4$?
Geben Sie in einer Tabelle die Anzahl der Nullstellen sowie die Anzahl und Art der Extremwerte in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbf{R}$ an.
Zeigen Sie, dass für t = 1 Wendepunkte auf der x-Achse liegen.

b) Für welches t ist $F(x)=-2x\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$ eine Stammfunktion einer der Funktionen f_t?
Für dieses t schließt das Schaubild der Funktion f_t und die x-Achse mehrere Teilflächen ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Teilflächen.

Die Fläche, die von der Kurve K mit dem Funktionsterm $k(x) = 4e^{-\frac{x^2}{4}}$, der y- und der x-Achse begrenzt wird, rotiert um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Körpers.

c) Die Funktion f_4 besitzt eine Stammfunktion, die **nicht** mit bekannten Funktionen angegeben werden kann. Berechnen Sie einen Näherungswert N für das Integral $I=\int_{-2}^{2} f_4(x)\,dx$.
Berechnen Sie zuerst einen Näherungswert I_1 für das Integral I, indem Sie im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ die Funktion f_4 durch eine quadratische Funktion q_1 approximieren und diese dann integrieren.
Berechnen Sie dann einen Näherungswert I_2 für das Integral I, indem Sie im Intervall $0 \leq x \leq 2$ die Funktion f_4 durch eine quadratische Funktion q_2 approximieren, diese dann integrieren und das Ergebnis verdoppeln.
Um wie viel Prozent weichen die Näherungswerte I_1 und I_2 vom Näherungswert N ab?
Wie ist der Unterschied zu erklären?

d) Die beiden Flächen, die von der Kurve K_2, der x-Achse sowie den Geraden x = -1 und x = u mit $u > \sqrt{2}$ begrenzt werden, rotieren um die x-Achse und erzeugen einen Körper, der an eine "Christbaumspitze" erinnert. Berechnen Sie das Volumen dieser "Christbaumspitze".
Welche Länge ist wohl für diese "Christbaumspitze" sinnvoll?
In diese "Christbaumspitze" soll von "unten" ein Loch gebohrt werden, ohne die äußere Form zu zerstören. Wie groß darf der Radius höchstens sein?
Wie groß ist die dazugehörige Bohrtiefe?

Punkteverteilung: a) 10 VP b) 8 VP c) 7 VP d) 5 VP