Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung **2003** Grundkurs **Mathematik** Aufgabe **I**

Haupttermin

Schulversuch mit einem Kleinrechner mit einem Computer-Algebra-System

Zu jedem $t \in \mathbf{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$f_t(x) = \dfrac{6x}{t \cdot x^2 - 1}$, $x \in \mathbf{D_t}$

Das Schaubild sei K_t.

a) Untersuchen sie für $t = -1$ das Schaubild K_{-1} auf Symmetrie, Asymptoten sowie auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.
Wählen Sie für t drei verschiedene Werte, für die sich die Schaubilder K_t, $t \in \mathbf{R}$ grundlegend unterscheiden und beschreiben Sie die Unterschiede.
Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_t in Abhängigkeit vom Parameter t.
Geben Sie die Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen der Funktion f_t in Abhängigkeit vom Parameter t an. (9 VP)

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Schaubildern K_{-1} und K_{-2} und den Geraden mit der Gleichung $x = -3$ und $x = 3$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Schaubildern K_{-1} und K_{-2}.
Zeigen Sie, dass das Schaubild der Funktion f_0 alle Schaubilder K_t, $t \in \mathbf{R}$, im Ursprung berührt. (7 VP)

c) Begründen Sie, dass die Tangenten von K_t für $t < 0$ in den Punkten $R(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-t}} \mid y_R)$ und $S(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-t}} \mid y_S)$ zusammen mit den Geraden mit der Gleichung $x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-t}}$ und $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-t}}$ ein Parallelogramm bilden.
Berechnen Sie den Inhalt A(t) der Fläche des Parallelogramms.
Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to -\infty} A(t)$ und interpretieren Sie das Ergebnis. (7 VP)

d) Die nebenstehende Skizze zeigt im Intervall [0;8] die Querschnittsfläche eines Rotationskörpers aus Glas. Das Glas ist schwarz markiert. Wählen Sie zwei geeignete Randkurven aus den Schaubildern K_t und berechnen Sie mit deren Hilfe das Volumen des Glases. (7 VP)