Lehrplan für das Fach Mathematik mit einem Computer-Algebra-System (CAS) an allgemeinbildenden Gymnasien in Baden-Württemberg

Klassenstufe 11 und Kursstufe

Hinweise:

Das CAS kann wahlweise ab Klassenstufe 11 oder 12 eingesetzt werden.

Vorlage für diesen Lehrplan ist der Lehrplan für die Klassenstufe 11 und die Kursstufe des Gymnasiums im Fach Mathematik mit einem grafikfähigen Taschenrechner. Die Inhalte der beiden Lehrpläne sind so abgestimmt, dass für beide Unterrichtsgänge gleiche Grundkompetenzen erworben werden können.

VORBEMERKUNGEN

Im traditionellen Mathematikunterricht besitzen die Vermittlung und die Anwendung von Kalkülen ein wesentlich größeres Gewicht als das Entdecken und das Verstehen zentraler Inhalte und Problemlösungen. Um die allgemein bildende Funktion des Unterrichtsfaches Mathematik wirksam zu entfalten, möchte der vorliegende Lehrplan dagegen die formal bestimmte Mathematik wie die anwendungs- und problemlöseorientierte Mathematik in gleicher Weise zur Geltung bringen. Unterrichtlich soll dies durch eine Akzentverschiebung weg von "Mathematik als Produkt" hin zu "Mathematik als Prozess" realisiert werden:

Mathematik als Produkt	*Mathematik als Prozess*
- Vermittlung und Anwendung eines Kalküls	- Erarbeitung des und Einsicht in den Kalkül
- Weitergabe von Wissen, Zusammenhänge vermitteln	- Aufbau von Wissen, Zusammenhänge entdecken
- Abgeschlossenheit anstreben	- Offenheit bewusst zulassen
- Von der Struktur zur Anwendung	- Vom Problem zur Struktur
- Im vorgegebenen Modell arbeiten	- Realität modellieren
- Isolierte Probleme mit eindeutiger Lösung	- Vernetzte Problemfelder mit vielfältigen Lösungen
- Begriffe vorgeben, Sätze formal beweisen	- Begriffe entwickeln, Sätze finden, plausibel begründen
- Konvergente, ergebnisorientierte Unterrichtsführung	- Offene prozessorientierte Unterrichtsführung
- Fehler als Zeichen mangelhafter Produktbeherrschung	- Fehler als Anlass für konstruktive Verbesserungen

Die zugehörigen Lehr- und Lernprozesse müssen daher verstärkt von "offenen Problemstellungen" ausgehen, die das eigenständige mathematische Handeln der Schülerinnen und Schüler herausfordern. Offene Aufgabenstellungen rücken auch das mathematische Modellbilden und das Interpretieren formaler Ansätze und Ergebnisse in den Vordergrund. Deshalb müssen auch das sprachliche Beschreiben von Problemlöseprozessen und die kritische Wertung der gefundenen Ergebnisse einen deutlich größeren Stellenwert erhalten.

Kreatives experimentelles Entdecken von Problemlösungen und von Zusammenhängen wird durch eine sachgerechte Anschauung wesentlich unterstützt. In Zukunft soll somit, insbesondere in der Analysis, die schnelle und einfache Visualisierung eines Sachverhalts am Anfang des Denkprozesses stehen und nicht als Ergebnis langwieriger Bemühungen am Ende. Damit erhält der Einsatz eines Rechners zum Plotten von Schaubildern, Lösen von Gleichungen und formalen Operationen mit mathematischen Objekten besondere Bedeutung. Er ermöglicht, die für das Fach Mathematik unverzichtbare Kompetenz im Umgang mit Funktionen zu erwerben. Diese umfasst alle in den Klassen 5 bis 11 behandelten Funktionstypen, ein Teil davon wird in der Kursstufe vertieft behandelt. Das Vertraut werden mit der grundlegenden Funktionalität des verwendeten CAS erfolgt nicht als isolierte Unterrichtseinheit sondern im Zusammenhang mit dem jeweiligen Inhalt.

Die Ansätze zum selbstorganisierten Lernen und zur Gewinnung von Methodenkompetenz sollen verstärkt werden. Der Lehrplan gibt deshalb Hinweise für schülerzentrierten Unterricht und zeigt Möglichkeiten für eine selbständige Erarbeitung durch die Schülerinnen und Schüler. Dazu gehören insbesondere die Anregungen für *projektorientiertes Arbeiten* und *selbstorganisiertes Lernen*.

Unterrichtsformen, die durch Begriffe wie kumulatives Lernen, problemorientiertes Lernen, Lernen aus Fehlern und neue Aufgabenkultur gekennzeichnet sind, sollen bevorzugt werden. Dazu tragen verschiedene Formen der Gruppen- und Teamarbeit sowie der selbstverständliche Einbezug neuer Medien und Technologien bei. Abwechslungsreiche, auch fächerverbindende Anwendungsaufgaben ermöglichen eine horizontale wie auch vertikale Vernetzung und fördern so nachhaltiges Verständnis.

Lehrplaneinheit 1: *Binomialverteilung*

Viele Vorgänge, zum Beispiel in der Wirtschaft und im Gesundheitsbereich, lassen sich als Bernoulli-Kette beschreiben. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler die Binomialverteilung exemplarisch für andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennen und bekommen Einblick in die grundsätzlichen Verfahren, Hypothesen zu testen und zu beurteilen.

Bernoulli-Kette	Jakob Bernoulli (1654 - 1705)
Binomialverteilung	Eine anschauliche Vorstellung vom Begriff Erwartungswert genügt. Verzicht auf Einschränkung durch Tabellenwerke Grafische Darstellung der Verteilung
Testen von Hypothesen	Veranschaulichung des Fehlers 1. und 2. Art

Lehrplaneinheit 2: *Funktionen* *< 25 >*

Die Untersuchung reeller Funktionen ist eine zentrale Aufgabe der Schulmathematik. Bei dieser Einheit handelt es sich um einen Zugang mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems ohne die Verwendung der Differentialkalküls. Dabei wird der Funktionsbegriff allgemein geklärt. Das CAS fördert bei diesen Inhalten entdeckendes Lernen.

Ganzrationale Funktionen	
Schaubild	
Nullstellen	
Faktorisieren	Nullstellensatz , Nullstellenordnung und Schaubild
Verhalten für $\lvert x\rvert \to \infty$	
Symmetrie	Gerade und ungerade Funktionen
Weitere Grundtypen von Funktionen und ihre charakteristischen Eigenschaften	Gedacht ist insbesondere an: $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$,
Bogenmaß	$f(x) = \sin(x), f(x) = \cos(x),$ $f(x) = a^x, f(x) = \log_a(x),\ a \in R^+ \setminus \{1\}$ Skizzieren zugehöriger Schaubilder
Affine Bilder von Funktionen	Verschiebung, achsenparallele Streckung Interpretation als Kurvenscharen
Funktion, Definitionsmenge, Wertemenge	Allgemeiner Funktionsbegriff
Stetigkeit	Anschaulicher Zugang genügt
Geraden	Als Vorbereitung des Ableitungsbegriffs
Steigungswinkel und Steigung einer Geraden	Insbesondere Steigung einer Geraden, die durch zwei Punkte gegeben ist
Orthogonalität	
Bestimmung von Geradengleichungen	

Lehrplaneinheit 3: Änderungsverhalten, Differenzierbarkeit *< 32 >*

Die Schülerinnen und Schüler lernen, wie sich mit Hilfe der Ableitungsfunktion das Änderungsverhalten von Funktionen quantitativ beschreiben läßt. Die dazu erforderlichen Begriffe werden zunächst anschaulich gewonnen und, soweit nötig, präzisiert. Mit der Ableitung erschließt sich ihnen ein wirkungsvolles Werkzeug zur Untersuchung von Funktionen.

Mittlere und momentane Änderungsrate	In verschiedenen anwendungsbezogenen Situationen Unter dem Aspekt der lokalen Änderung, z. B. Momentangeschwindigkeit, Momentanleistung Geometrische Deutung
Differenzierbarkeit einer Funktion	Verwendung der Sprech- und Schreibweise für Grenzwerte ohne formale Präzisierung Gegenbeispiele (auch als Schülerreferate) Bedeutung von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), Isaac Newton (1643 - 1727) und Leonhard Euler (1707 - 1783) für die Entwicklung der Analysis
Tangente und Normale	→ G, LPE 1: Veränderungen durch Wissenschaft und Entdeckungen
Ableitung, Ableitungsfunktion	Schreibweise: $f'(x)$ bzw. $\frac{dy}{dx}$
Ableitung der Funktionen mit $f(x)=x^k$ $(k \in \mathbb{Z})$, $f(x) = \sqrt{x}$ $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$	
Ableitungsregeln für $c \cdot f$ und $f + g$	
Ableitung der ganzrationalen Funktion	
Höhere Ableitungen	Deutung von f'' in Bezug auf das Änderungsverhalten von f' und von f
Bedingungen für Monotonie, Extremstellen und Wendestellen	Notwendig, hinreichend

Lehrplaneinheit 4: Mathematik in der Praxis: Untersuchung von Funktionen *< 18 >*

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, wie wichtig Funktionen für die mathematische Behandlung von Problemen in Naturwissenschaft, Technik, Gesellschaft und Umwelt sind. Sie verwenden Funktionen für die Beschreibung funktionaler Abhängigkeiten und deuten Eigenschaften des Funktionsterms und des Schaubilds anwendungsbezogen. Durch den Einsatz eines CAS können auch realitätsnahe Probleme bearbeitet werden. Es bieten sich Projektaufgaben an, auch im Hinblick auf die Verkehrs- und Umwelterziehung.

	An eine isolierte Behandlung der Lehrplaneinheit ist nicht gedacht.
Untersuchung von Funktionen in realem Bezug	Die Möglichkeiten des CAS sind problemangemessen einzusetzen (grafische, numerische bzw. symbolische Lösungen). → Ph, LPE 1: Kinematik einfacher geradliniger Bewegungen
Extremalprobleme	
Bestimmung ganzrationaler Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften	

Aspekte eines schülerorientierten Unterrichts

Neben die Vermittlung von Inhalten tritt die selbstständige Erarbeitung durch die Schülerinnen und Schüler. An geeigneten Stellen bearbeiten sie vorwiegend außerhalb des Unterrichts allein oder im Team ein Thema (siehe Anhang: Vorschläge für *Selbstorganisiertes Lernen*) und leisten mit ihren Ergebnissen einen Beitrag zum Unterricht. Dabei kommt es besonders auf die Dokumentation und die Präsentation der Ergebnisse an.

In den folgenden Lehrplaneinheiten werden auch Themen zum projektorientierten Arbeiten zur Wahl gestellt. Diese können über die Lehrplaneinheit oder Kursstufe hinausführen und fördern damit das kumulative und vernetzte Lernen. Mindestens eines dieser Themen ist zu bearbeiten.

Im Hinblick auf mündliche Prüfungen sollen das Darstellen und Begründen sowie das Verhalten in Prüfungssituationen eingeübt werden.

Lehrplaneinheit 1: Folgen und Grenzwerte *< 20 >*

Bei der Untersuchung von Folgen erfahren die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, ihre bisherige Vorstellung von Grenzprozessen zu präzisieren. Sie lernen eine formale Beschreibung des Infinitesimalen kennen und verstehen. So gewinnen sie eine vertiefte Einsicht in die Grundlagen der Analysis.

	Im Vordergrund steht die Grenzwertidee und nicht das formale Nachweisen von Grenzwerten.
Folgen, rekursive Folgen Grenzwert einer Folge	Einsatz des CAS auch zur Visualisierung Diskrete Modellierung von Wachstumsvorgängen Numerische Bestimmung der eulerschen Zahl e Leonhard Euler (1707-1783)
Konvergenz monotoner und beschränkter Folgen	An eine formale Behandlung von Monotonie und Beschränktheit ist nicht gedacht. Der Zusammenhang mit der Intervallschachtelung sollte veranschaulicht werden.
Vollständige Induktion	
Grenzwerte von Funktionen	
Projektorientiertes Arbeiten: W Reihen W Fibonacci	Mögliche Themen für Schülerreferate: Historische Texte Bestimmung von π Anwendung von Folgen Folgen der fraktalen Geometrie Iterationsverfahren → D ARB 1, Sprechen und Schreiben

Lehrplaneinheit 2: Einführung in die Integralrechnung *< 15 >*

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass der Zusammenhang zwischen der Integral- und Differenzialrechnung den Zusammenhang zwischen einer Größe und ihrer Änderung beschreibt. Bei der Einführung des Integrals erfahren sie erneut die Tragweite des Grenzwertbegriffs. Ein CAS bietet die Möglichkeit, den Integralbegriff über die Summation einzuführen und den Hauptsatz experimentell erfahren zu lassen.

Konstruktion von Funktionen über die Änderungsrate	Produktsummenbildung
Integral, Integralfunktion Stammfunktion	Verschiedene Aspekte des Integralbegriffs wie z.B. aus Änderungen rekonstruierter Bestand, Mittelwert, Flächen- und Rauminhalt
Eigenschaften des Integrals	
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	

Lehrplaneinheit 3: *Weiterführung der Differenzial- und Integralrechnung im Bereich ausgewählter Funktionen* < 36 >

Die Methoden der Differenzial- und Integralrechnung werden weiterentwickelt. So finden die Schülerinnen und Schüler Zugang zu weiteren wichtigen Funktionsklassen und lernen ihre charakteristischen Eigenschaften kennen. Die Arbeit mit einem CAS ermöglicht das selbstständige Entdecken dieser wichtigen Eigenschaften. Damit erwerben sie weitere Kompetenzen, konkrete Situationen zu mathematisieren. Sie stellen ihre Bearbeitung übersichtlich, logisch richtig und sprachlich korrekt dar. Der unterrichtliche Stellenwert vollständiger Kurvenuntersuchungen reduziert sich durch den Einsatz des CAS.

Produkt- und Quotientenregel	
Verkettung von Funktionen, Kettenregel	
Integration durch lineare Substitution	
Gebrochen-rationale Funktionen	→ Ph(4) LPE 1, Radiales elektrisches Feld
Trigonometrische Funktionen	→ Ph(2) LPE 1, Ph(4) LPE 4, Sinusfürmige Wechselspannungen Ph(2) LPE 2, Ph(4) LPE 5, Harmonische Schwingungen Ph(2) LPE 2, Ph(4) LPE 7, Elektromagnetische Schwingungen
Exponentialfunktionen	Logarithmusfunktion als Hilfsmittel, auch bei Integralen
Untersuchung zusammengesetzter Funktionen	
W Funktionen mit zwei Veränderlichen	

Lehrplaneinheit 4: *Mathematik in der Praxis: Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung* < 25 >

Anhand zahlreicher Beispiele gewinnen die Schülerinnen und Schüler Einblick in den Anwendungsaspekt der Mathematik und erkennen damit die tragende Bedeutung mathematischer Methoden und Verfahren zur Lösung vieler realer Probleme. Insbesondere werden sie sich der einzelnen Schritte des Modellierens bewusst: Problembeschreibung, mathematische Modellierung, Durchführung der Modellrechnung, Interpretation, Modellkritik. Ein CAS erlaubt ihnen nun auch Antworten in den Fällen zu geben, die sie ohne dieses Hilfsmittel nicht lösen können. Die angewandten Arbeitsmethoden, auch der Umgang mit den entsprechenden Hilfsmitteln, führen die Schülerinnen und Schüler an die Grundlagen wissenschaftlicher Arbeit heran.

➢ **4**

	An eine isolierte Behandlung dieser Unterrichtseinheit ist nicht gedacht.
Näherungsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen und Berechnung von Integralen	Das Verständnis für das Prinzip steht im Vordergrund. Newton-Verfahren, Isaac Newton (1643 - 1727) Keplersche Regel, Johannes Kepler (1571 - 1630) Schülerreferat
Anwendungen des Integrals Rotationsvolumen	Z. B. auch Bogenlänge, Oberfläche, Mittelwert → Ph(2 u. 4) LPE 1, Energie des elektrischen Feldes → Ph(4) LPE 4, Effektivwerte
Wachstums- und Zerfallsprozesse	
Die Differenzialgleichungen für natürliches, beschränktes und logistisches Wachstum	
Funktionen in realem Bezug	
Funktionsanpassung	Auch nichtlineare Regression

Offene Problemstellungen	Beispiele aus Naturwissenschaften, Technik, Gesellschaft und Umwelt Selbstständige Bearbeitung von Beispielen aus verschiedenen Sachgebieten in Form von Schülerreferaten oder als Gruppenpuzzle
➢ 5	
Projektorientiertes Arbeiten: W Modellierung W Differenzialgleichungen W Dynamische Prozesse W Splines, Taylorpolynome	→ B LPE 2, Rezeptor, LPE 3 Gk(2) LPE 12/1, Gk(4) LPE 13/1 Ph(4) LPE 4

Lehrplaneinheit 5: Lineare Gleichungssysteme, Vektoren *< 16 >*

Mit den linearen Gleichungssystemen lernen die Schülerinnen und Schüler ein zentrales Gebiet der Mathematik kennen, das in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft unentbehrliche Hilfsmittel bereitstellt Die erworbenen Kenntnisse setzen sie bei der Behandlung realer Probleme aus unterschiedlichen Fachgebieten ein. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit Vektoren im Anschauungsraum und werden mit ihnen vertraut.

	Es ist empfehlenswert, dir Lehrplaneinheiten 5 und 6 zu kombinieren.
Gauß-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme (LGS)	Schülerreferat: Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) Strukturierte Darstellung der Lösungsmenge
Lineare Gleichungssysteme in realem Bezug	Im Vordergrund steht die Anwendung Das LGS wird i. A. mit Hilfe des CAS gelöst.
Vektoren	Lösungen von LGS, Vektoren im Anschauungsraum
Rechnen mit Vektoren	
Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	
W Mehrstufige Prozesse W Vektorraumstruktur	Matrizen als Hilfsmittel Hier bietet sich projektorientiertes Arbeiten an.

Lehrplaneinheit 6: Affine Geometrie im Anschauungsraum *< 20 >*

Die Schülerinnen und Schüler erfahren, wie sich Geraden und Ebenen im Raum durch einfache Gleichungen darstellen lassen. Die Verwendung von Vektoren ermöglicht es ihnen, geometrische Fragestellungen nach Parallelität, Inzidenz und Teilverhältnissen mit Hilfe eines geeignet gewählten Koordinatensystems durch einfache rechnerische Verfahren zu beantworten. Sie sollen räumlich-geometrische Sachverhalte in Schrägbildern veranschaulichen können. Sie erleben am Beispiel von Sätzen aus der affinen Geometrie die Eleganz vektorieller Beweismethoden und lernen, solche Beweise selbst zu finden und zu führen.

Vektorgleichungen von Gerade und Ebene	
Veranschaulichung im Schrägbild	
Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen	Geeignet für eine selbstständige Erarbeitung zum Beispiel in Form einer Planarbeit oder Gruppenarbeit
Bestimmung von Teilverhältnissen	
Beweisverfahren bei Sätzen der affinen Geometrie	

Lehrplaneinheit 7: *Metrische Geometrie im Anschauungsraum* *< 25 >*

Während bisher Lage und Inzidenz im Vordergrund der Betrachtungen standen, interessieren jetzt metrische Fragestellungen. Die Schülerinnen und Schüler begreifen das Skalarprodukt als wertvolles Werkzeug, das durch seine Einfachheit besticht und viele Anwendungen in Mathematik und Physik zulässt. Sie erleben, wie die Raumgeometrie durch den Einsatz vektorieller Methoden angemessen beschrieben und erforscht werden kann. Sie lernen deshalb die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel sicher und sachgerecht zu verwenden. Ihre Fähigkeiten, selbstständig Beweise zu führen, werden auf Sätze der metrischen Geometrie erweitert. In dieser Lehrplaneinheit empfiehlt sich eine selbstständige Erarbeitung von Inhalten in Form einer Planarbeit, Gruppenarbeit oder projektorientierten Arbeit.

	Geeignet für eine selbstständige Erarbeitung zum Beispiel in Form einer Planarbeit oder Gruppenarbeit. Darstellen und Bewerten verschiedener Zugänge und Lösungswege
Betrag eines Vektors	
Skalarprodukt und Vektorprodukt	Eigenschaften
Normalenform der Ebenengleichung	
Abstände und Winkel	
Kugel	Hier ist an Lagebeziehungen und einfache Schnittprobleme gedacht.
Beweisverfahren bei Sätzen der euklidischen Geometrie	

Anhang: Vorschläge für *Selbstorganisiertes Lernen*

Vorschläge von Sachgebieten, aus denen Teilaspekte bearbeitet werden können:	Für die Zeit nach dem schriftlichen Abitur eignen sich auch folgende Themen:
W Themen der Vorschläge für projektorientiertes Arbeiten aus der Kursstufe W Anwendungen in verschiedenen Lebensbereichen und Wissenschaften W Grenzwertidee W Umkehrung von Funktionen W Geschichte der Mathematik W Besondere Leistungen von Frauen und Männern in der Mathematik W Wahrscheinlichkeitsverteilungen W Parametrisierte Kurven W Taylor-Reihe W Algebraische Kurven	W Mathematik und Verkehr W Analytische Geometrie der Kugel W Affine Abbildungen W Kegelschnitte W Komplexe Zahlen W Numerische Mathematik W Elementare Zahlentheorie W Chaos und Fraktale W Markoff-Ketten W Kryptologie W Boolesche Algebra