Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung **2004** **Mathematik** Aufgabe **I**

<u>Haupttermin</u> **Analysis**

Schulversuch mit einem Kleinrechner mit einem Computer-Algebra-System

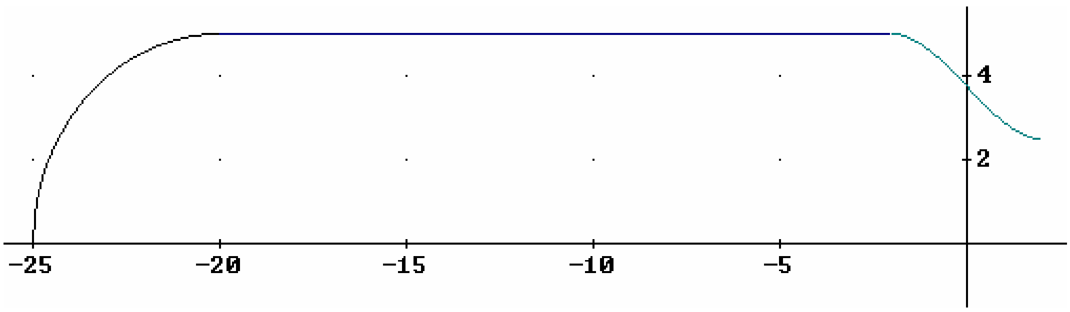
Aufgabe 1

a) Für jedes k ∈ $\mathbf{R}^+$ gibt es eine ganzrationale Funktion p dritten Grades, deren Schaubild durch die Punkte $A(-2\,|\,k)$, $B(0\,|\,\frac{2k+5}{4})$ und $C(2\,|\,\frac{5}{2})$ geht und im Punkt A eine waagrechte Tangente hat. Bestimmen Sie den Funktionsterm dieser Funktion. (3 VP)

b) Gegeben ist die Funktion f_k mit k ∈ $\mathbf{R}^+$ und dem Funktionsterm

$$f_k(x)=\begin{cases}\sqrt{k^2-(x+20)^2} & \textit{für } -20-k\le x\le -20\\ k & \textit{für } -20<x<-2\\ \frac{2k-5}{64}\cdot x^3-\frac{3}{16}(2k-5)\cdot x+\frac{2k+5}{4} & \textit{für } -2\le x\le 2\end{cases}$$

Für k = 5 ergibt sich das folgende Schaubild.



Das Schaubild der Funktion f_k rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie den Rauminhalt V_k des erzeugten Rotationskörpers.
Für welchen Wert k_0 beträgt der Rauminhalt 1000? (5 VP)

Aufgabe 2

a) In einer Tasse ist Kaffee der Temperatur 90° C. Die Zimmertemperatur beträgt 20° C. Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Kaffees (in °C pro min) wird durch die Funktion g mit folgendem Funktionsterm beschrieben

$g(t) = -\frac{42}{5}e^{-\frac{3}{25}t}$, $t \ge 0$ (Angabe ohne Einheiten).

Die Variable t beschreibt die Zeit (in min).

Begründen Sie, dass die Funktion g einen Abkühlvorgang beschreibt.
Berechnen Sie den Funktionsterm h(t) der Temperatur des Kaffees.
Wie viele Minuten dauert es ungefähr, bis sich der Kaffee in der Tasse auf die Hälfte der Ausgangstemperatur abgekühlt hat? (VP 5)

b) Eine Thermoskanne ist mit Kaffee der Temperatur 90° C gefüllt. Die Zimmertemperatur beträgt 20° C. Pro Stunde beträgt die Abkühlung 7% der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur.
Die Temperatur des Kaffees in der Thermoskanne zur vollen Stunde kann näherungsweise durch die Folge u_n mit der Rekursion

$u_n = u_{n-1} + \frac{7}{100} \cdot (20 - u_{n-1})$ mit $u_0 = 90$, $n \in \mathbf{N}$ und $n \geq 1$ (Berechnungen ohne Einheiten)

berechnet werden.
Zeigen Sie mit Vollständiger Induktion, dass

$u_n = 20 + 70 \cdot \left(\frac{93}{100}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$

eine explizite Lösung der Rekursion ist.
Wie viele Stunden dauert es ungefähr, bis sich der Kaffee auf die Hälfte der Ausgangstemperatur abgekühlt hat? (VP 5)