Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung **2000** Leistungskurs **Mathematik** Aufgabe **I**

Haupttermin

Hilda-Gymnasium Pforzheim

Schulversuch mit einem Kleinrechner mit einem Computer-Algebra-System

Für jedes $t \neq 0$ sind zwei Funktionen f_t und g_t gegeben durch

$$f_t(x) = \ln\frac{tx}{1-x} \quad \text{und} \quad g_t(x) = \frac{e^x}{e^x + t}, \; x \in \mathbf{R}.$$

Das Schaubild von f_t sei K_t.und das Schaubild von g_t sei C_t.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion f_1.
Untersuchen Sie K_1 auf Achsenschnittpunkte, Asymptoten, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
Geben Sie die Wertemenge der Funktion f_1 an.
Zeigen Sie, dass K_1 punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist.
Begründen Sie, dass f_1 umkehrbar ist und zeigen Sie, dass g_1 die Umkehrfunktion ist.
Geben Sie ohne weitere Rechnung Definitions- und Wertemenge, Achsenschnittpunkte, Asymptoten und Symmetrieverhalten von C_1 an.

b) Die beiden Kurven K_1 und C_1 schließen im 1. Feld mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. Begründen Sie, dass die Fläche von der 1. Winkelhalbierenden halbiert wird.
Um den Schnittpunkt der beiden Kurven K_1 und C_1 zu berechnen, muss ein Iterationsverfahren angewandt werden. Berechnen Sie, ausgehend von einem geeigneten Startwert, Näherungslösungen der Gleichung $f_1(x) = x$ mit Hilfe des Newtonschen Iterationsverfahrens. Das Verfahren kann abgebrochen werden, wenn sich die 5. Dezimale der Näherungslösung nicht mehr ändert.
Bestimmen Sie nun den Inhalt der obigen Fläche mit Hilfe einer Näherungslösung für den Schnittpunkt der beiden Kurven K_1 und C_1.

c) Prüfen Sie, ob alle Funktionen f_t eine Umkehrfunktion besitzen und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Funktionsgleichung.
Die Differentialgleichung für das logistische Wachstum lautet:
$y' = c \cdot y \cdot (S - y)$,
wobei c und S geeignete Konstanten sind.
Bestimmen Sie die Konstanten S und c so, dass die Funktionen g_t für $t > 0$ diese Differentialgleichung erfüllen.

d) Biologen beobachten die Ansiedlung einer ursprünglich sibirischen Wildentenart am Bodensee. Bestandsschätzungen der Jahre 1990, 1994 und 1998 ergaben 4000, 7200 und 12000 Tieren.
Einer Theorie zufolge könnte die Bestandsentwicklung nach dem Modell des logistischen Wachstums erfolgen. Ganz allgemein lässt sich dann der Bestand zur Zeit t durch eine Funktion B der Form $B(t) = \frac{u}{v + e^{kt}}$ mit geeigneten Konstanten u, v, k beschreiben, wobei t die Zeit in Jahren seit 1990 ist.
Bestimmen Sie die Konstanten u, v, k mit Hilfe der gegebenen Daten.
Welcher Bestand ergäbe sich danach für das Jahr 2002?
Mit welchem Bestand müsste auf lange Sicht gerechnet werden?

Punkteverteilung: a) 9 VP b) 8 VP c) 6 VP d) 7 VP