

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = 4 - 3e^{-0,5x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei K .

a.) Untersuchen Sie K auf wesentliche Punkte, Eigenschaften.

Zeichnen Sie K und die Asymptote in ein Koordinatensystem.

Die Gerade mit der Gleichung $y = 4$, die y -Achse und das Schaubild K begrenzen eine ins Unendliche reichende Fläche. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Bestimmen Sie diejenige Gerade mit der Gleichung $x = z$, $z > 0$, welche den Inhalt dieser Fläche halbiert. (8VP)

b.) Das Schaubild von f , die x -Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 10$ begrenzen eine Fläche. Diese Fläche rotiert um die x -Achse. Der dabei entstehende Rotationskörper stellt ein Kelchglas ohne Fuß dar. Als Fuß wird ein 10 LE langes Glasrohr mit Radius 1 LE genommen, in welches das Kelchglas bis zum Anschlag geschoben wird. Von der Wandstärke des Kelchglases und des Rohres (Fuß) wird abgesehen.

Wieviel LE unterhalb des oberen Glasrandes berührt das Rohr das Kelchglas?

Bestimmen Sie das Fassungsvermögen des Kelchglases.

Zeichnen Sie ein räumliches Bild des Kelchglases mit dem Rohr als Fuß ?. (8VP)

c.) Es sei x_0 die Nullstelle der Funktion f . Im Intervall $[x_0; 0]$ soll die Funktion f durch eine ganzrationale Funktion h 3. Grades approximiert werden, so dass f und h an der Stelle $x = 0$ im Funktionswert und in der ersten und zweiten Ableitung übereinstimmen. Ferner soll f und h die gleiche Nullstelle besitzen.

Bestimmen Sie die Funktion h .

Zeigen Sie, dass für alle x , $x_0 < x < 0$, gilt: $f(x) > h(x)$. (7VP)

d.) Die Höhe (in dm) einer Pflanze zur Zeit t (in Wochen) seit dem Beginn der Beobachtung wird durch die Funktion B mit

$$B(t) = G - Me^{-0,5t} - \frac{1}{t+1}, \quad t \geq 0$$

mit positiven Konstanten G , M beschrieben.

Bestimmen Sie G und M , wenn zu Beginn, $t = 0$, der Beobachtung die Pflanze 1dm hoch war und die Pflanze höchstens 4dm hoch werden kann.

Wann hat die Pflanze 75% ihrer Endhöhe erreicht ?

Wenn der Zuwachs pro Woche weniger als 1% beträgt wird die Pflanze geerntet.

Ab welcher Woche kann die Pflanze geerntet werden ? (7 VP)