Zusammenfassung: Kreisbewegungen und Gravitationsgesetz

Kreisbewegungen

Definition: Eine Kreisbewegung eines (punktförmigen) Körpers heißt gleichförmig, wenn der Betrag seiner Geschwindigkeit konstant ist.

Vereinbarung: Wir betrachten nur *gleichförmige* Kreisbewegungen.

Durchläuft ein Körper einen Kreis mit dem Radius r, dann ist die bei einem Umlauf zurückgelegte Strecke der Kreisumfang $2\pi r$, und die dafür benötigte Zeit ist die Umlaufdauer T. Also hat die Geschwindigkeit den Betrag

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T},$$

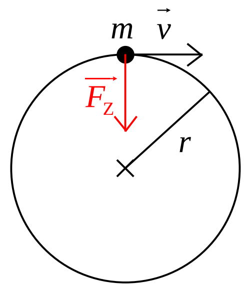
also

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T}}.$$

Die Richtung der Geschwindigkeit ist stets tangential zur Kreisbahn.

Damit ein Körper eine Kreisbahn durchläuft, muss auf ihn eine zum Kreismittelpunkt gerichtete Zentripetalkraft $\vec{F_Z}$ wirken.
Ohne Herleitung: Hat der Kreis den Radius r und hat der Körper die Masse m sowie die Geschwindigkeit v, dann hat die Zentripetalkraft den Betrag

$$\boxed{F_Z = \frac{mv^2}{r}}.$$



Setzt man in diese Gleichung die obige Gleichung für die Geschwindigkeit v ein, dann erhält man

$$F_Z = \frac{m \cdot \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{m \cdot \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}}{r} = \frac{m \cdot 4\pi^2 r^2}{r \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2},$$

also

$$\boxed{F_Z = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}}.$$

Diese Formel muss man verwenden, wenn in einer Aufgabe weder der Radius r noch die Geschwindigkeit v gegeben ist.

Aus der Grundgleichung $F = m \cdot a$ der Mechanik folgt: Ein Körper, der eine Kreisbahn durchläuft, erfährt eine zum Kreismittelpunkt gerichtete Zentripetalbeschleunigung $\vec{a_Z}$. Hat der Kreis den Radius r und hat der Körper die Geschwindigkeit v, dann hat die Zentripetalbeschleunigung den Betrag

$$F = ma$$

$$a_Z = \frac{F_Z}{m} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{m} = \frac{mv^2}{mr} = \frac{v^2}{r}.$$

Die Überlegungen zur Zentripetalkraft gelten für einen ruhenden Beobachter.
Beispiel: Der Mond kreist (näherungsweise) um die Erde, weil er von der Erde angezogen wird. Die Erdanziehungskraft wirkt auf den Mond als Zentripetalkraft.

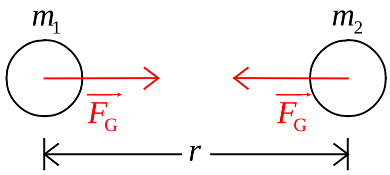
Für einen mitrotierenden Beobachter erfährt ein Körper, der eine Kreisbahn durchläuft, eine vom Kreismittelpunkt weg gerichtete Zentrifugalkraft („Fliehkraft“) $\vec{F_Z}^*$, für deren Betrag die gleichen Formeln gelten wie für den Betrag der Zentripetalkraft.
Beispiel: Wenn ein Auto um eine Kurve fährt, dann erfahren die Insassen eine Zentrifugalkraft nach außen.

Bei der Untersuchung der Frage, welche Kräfte bei einer Kreisbewegung auf einen Körper wirken, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Man nimmt den Standpunkt eines ruhenden Beobachters ein: Dann muss die Resultierende aller auf den Körper wirkenden Kräfte die Zentripetalkraft $\vec{F_Z}$ ergeben.
2. Man nimmt den Standpunkt eines mitrotierenden Beobachters ein: Dann wirkt auf den Körper die Zentrifugalkraft $\vec{F_Z}^*$, und die Resultierende aller übrigen auf den Körper wirkenden Kräfte muss diese Zentrifugalkraft ausgleichen, so dass am Körper Kräftegleichgewicht herrscht.

Gravitationsgesetz

Zwei Körper ziehen sich gegenseitig mit einer Gravitationskraft $\vec{F_G}$ an. Haben die (kugelförmigen) Körper die Massen m_1 und m_2 und haben die Schwerpunkte (bei kugelförmigen Körpern: die Mittelpunkte) der Körper den Abstand r, dann haben die Kräfte den Betrag



$$\boxed{F_G = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}}.$$

Dabei ist die Gravitationskonstante

$$\boxed{\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}}.$$

Viele Himmelskörper durchlaufen näherungsweise eine Kreisbahn um ein Zentralgestirn. Dabei wirkt (von einem ruhenden Beobachter aus gesehen) die Gravitationskraft des Zentralgestirns als Zentripetalkraft; es gilt also

$$F_G = F_Z.$$

Kennt man den Bahnradius und die Umlaufdauer des Himmelskörpers, dann kann man mit dieser Gleichung die Masse des Zentralgestirns berechnen. Dazu muss man die Masse des umlaufenden Himmelskörpers nicht kennen; allerdings kann man diese Masse auch nicht berechnen.

Standardaufgabe: Ein Satellit umkreist die Erde. Eine der drei Größen

- Höhe h über der Erdoberfläche
- Geschwindigkeit v
- Umlaufdauer T

ist gegeben. Berechne die beiden anderen Größen.

<u>Lösung:</u>

- $r = r_\mathrm{E} + h$ (r_E: Erdradius)
- Die Gravitationskraft der Erde wirkt als Zentripetalkraft; also gilt

  $$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{Z} \quad (*)$$

  mit $F_\mathrm{G} = \gamma \frac{m_\mathrm{E} m_\mathrm{S}}{r^2}$ (m_E: Erdmasse; m_S: Satellitenmasse).
- Ist h oder v gegeben, dann verwende in (*) die Formel $F_\mathrm{Z} = \frac{m_\mathrm{S} v^2}{r}$ und berechne die andere Größe.
- Ist T gegeben, dann verwende in (*) die Formel $F_\mathrm{Z} = \frac{4\pi^2 m_\mathrm{S} r}{T^2}$ und berechne r.
- Berechne mit $v = \frac{2\pi r}{T}$ die dritte Größe.