Zusammenfassung: Elektrische Felder

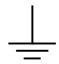
Wiederholung: Elektrische Grundschaltungen

Elektrische Ladung

<u>Ladung</u> Q
<u>Einheit:</u> 1 C (Coulomb)

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.

Ladungen kann man mit einem <u>Elektroskop</u> nachweisen und mit einem <u>Messverstärker</u> messen.

Einen geladenen Körper kann man durch <u>Erdung</u> entladen. Schaltzeichen: 

Ladungen treten immer als (positive oder negative) ganzzahlige Vielfache der <u>Elementarladung</u>

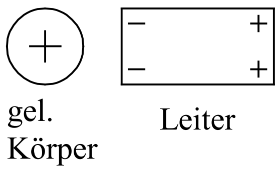
$$\boxed{e = 1,60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}$$

auf; dies weist man experimentell mit dem <u>Millikan-Versuch</u> nach.

Die Träger der positiven Ladung sind die <u>Protonen</u> im Atomkern; jedes Proton trägt eine positive Elementarladung. Die Träger der negativen Ladung sind die <u>Elektronen</u> in der Atomhülle; jedes Elektron trägt eine negative Elementarladung. In einem (nicht ionisierten) Atom neutralisieren sich diese Ladungen.

In einem <u>Leiter</u> ist ein Teil der Elektronen frei beweglich.

Bei Annäherung eines geladenen Körpers werden in einem Leiter Ladungen durch <u>Influenz</u> getrennt.



Elektrische Felder und elektrische Feldstärke

<u>Definition:</u> In der Umgebung einer Ladung ist ein <u>elektrisches Feld</u>; dort erfahren andere Ladungen (elektrische) Kräfte.

Die Richtung der Kraft in einem elektrischen Feld beschreibt man durch <u>Feldlinien</u>. Eine <u>Probeladung</u> (d. h. eine kleine Ladung, von der man idealisierend annimmt, dass sie das elektrische Feld nicht verändert) erfährt eine Kraft <u>tangential</u> zu den Feldlinien. Die <u>Richtung</u> der Feldlinien gibt die Richtung der Kraft auf eine <u>positive</u> Probeladung an.
Wichtige elektrische Felder:

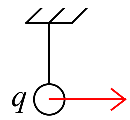
- Feld einer kugelförmigen Ladung
- Feld zweier entgegengesetzt geladener Kugeln
- Feld zweier gleichnamig geladener Kugeln
- Feld zwischen zwei entgegengesetzt geladenen parallelen Platten (<u>Kondensatorplatten</u>): Die Feldlinien verlaufen parallel (vom Randfeld abgesehen).
- Feld im Innern eines Metallrings: Aufgrund von Influenz ist das Innere eines metallischen Hohlkörpers feldfrei (<u>Faradayscher Käfig</u>).

In der Elektrostatik (d. h. alle Ladungen ruhen, und alle Felder sind zeitlich konstant)

- beginnen Feldlinien an positiven Ladungen und enden an negativen Ladungen;
- stehen Feldlinien senkrecht auf Metalloberflächen.

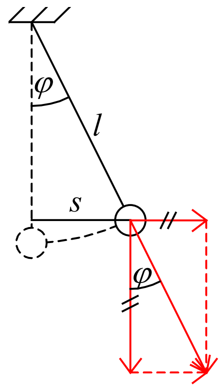
Man kann sich anschaulich überlegen (und experimentell nachweisen), dass die Kraft F, die eine Probeladung q in einem Punkt eines elektrischen Felds erfährt, proportional zur Ladung q ist. Also ist der Quotient $\frac{F}{q}$ („Kraft pro Ladungseinheit") konstant, d. h. unabhängig von q.

Definition: Die elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ ist eine gerichtet Größe:



1. Der Betrag E der elektrischen Feldstärke in einem Feldpunkt ist der Quotient aus dem Betrag F der Kraft, den eine Probeladung q in diesem Punkt erfährt, und der Ladung q:
   $$\boxed{E = \frac{F}{q}}.$$
   Einheit: $1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$
2. Die Richtung der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ in einem Feldpunkt ist die Richtung der Kraft $\vec{F}$, die eine positive Probeladung in diesem Feldpunkt erfährt.

Messung des Betrags der elektrischen Feldstärke:
Wir betrachten ein elektrisches Feld, dessen Feldlinien waagrecht verlaufen. Man hängt ein kleines Kügelchen, das eine Ladung q trägt, an einem isolierenden Faden auf. In der Praxis kann man die Kraft F nicht mit einem Kraftmesser messen, weil sie zu klein ist. Stattdessen misst man die horizontale Auslenkung s, die das Kügelchen erfährt. Das Kügelchen wird so weit ausgelenkt, dass die resultierende Kraft aus der elektrischen Kraft $\vec{F_{\mathrm{el}}}$ und der Gewichtskraft $\vec{G}$ in Verlängerung des Fadens wirkt.



Es gilt $\sin\varphi = \frac{s}{l}$ und $\tan\varphi = \frac{F_{\mathrm{el}}}{G}$; daraus berechnet man die Kraft F.

Bemerkung: Für kleine Winkel φ gilt näherungsweise $\tan\varphi = \sin\varphi$; also gilt näherungsweise $\frac{s}{l} = \frac{F_{\mathrm{el}}}{G}$.

Ein elektrisches Feld heißt homogen, wenn die Feldstärke $\vec{E}$ (nach Betrag und Richtung) überall gleich ist. Beispielsweise ist das elektrische Feld zwischen zwei Kondensatorplatten (vom Randbereich abgesehen) homogen.

Spannung und Potenzial

Eine Ladung q werde von einem Punkt A eines elektrischen Felds zu einem Punkt B des Felds transportiert. Dabei verrichtet die Feldkraft Arbeit W an der Ladung. (Muss man Arbeit W gegen die Feldkraft verrichten, dann wird W negativ gerechnet.) Man kann sich überlegen, dass diese Arbeit W

- nicht vom Weg abhängt, auf dem die Ladung von A nach B transportiert wird;
- proportional zur Ladung q ist. Also ist der Quotient $\frac{W}{q}$ („Arbeit pro Ladungseinheit") konstant, d. h. unabhängig von q.

<u>Definition:</u> Die <u>Spannung</u> U zwischen einem Punkt A und einem Punkt B eines elektrischen Felds ist der Quotient aus der Arbeit W, die die Feldkraft beim Transport einer Ladung q von A nach B an der Ladung verrichtet, und der Ladung q:

$$\boxed{U = \frac{W}{q}}.$$

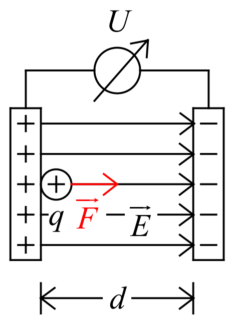
<u>Einheit:</u> $1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$ (Volt)

In einem <u>homogenen</u> elektrischen Feld der Feldstärke E gilt für die Spannung U zwischen zwei Punkten, deren Verbindungsstrecke parallel zu den Feldlinien verläuft und die den Abstand d haben:

$$U = \frac{W}{q} = \frac{F \cdot d}{q} = \frac{F}{q} \cdot d = E \cdot d\,.$$

Liegt an zwei Kondensatorplatten mit dem Plattenabstand d die Spannung U, dann beträgt die Feldstärke im (homogenen) Feld zwischen den Kondensatorplatten also

$$\boxed{E = \frac{U}{d}}.$$



Daraus ergibt sich als weitere (und übliche) <u>Einheit</u> der Feldstärke: $1\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

<u>Definition:</u> Das <u>Potenzial</u> φ eines Punkts eines elektrischen Felds ist die Spannung zwischen dem Punkt und einem fest gewählten Bezugspunkt.

Üblicherweise nimmt man als Bezugspunkt die Erde oder den Minuspol der Spannungsquelle.

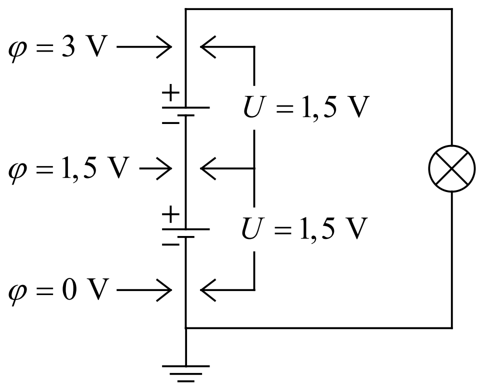
Unterscheide die Spannung <u>zwischen zwei</u> Punkten und das Potenzial <u>in einem</u> Punkt.

Anschaulich stellt man sich das Potenzial eines Punkts als die <u>Höhe</u> über dem Bezugspunkt vor.

Die Differenz der Potenziale zweier Punkte ist gleich der Spannung zwischen diesen Punkten:

$$\varphi_A - \varphi_C = U_{AB} - U_{CB} = U_{AB} + U_{BC} = U_{AC}\,.$$

Anschaulich stellt man sich die Spannung zwischen zwei Punkten als die <u>Höhendifferenz</u> zwischen diesen Punkten vor.



Punkte mit gleichem Potenzial bilden eine <u>Äquipotenzialfläche</u>; sie ist orthogonal zu den Feldlinien.

Im homogenen elektrischen Feld zwischen zwei Kondensatorplatten sind die Äquipotenzialflächen Ebenen parallel zu den Kondensatorplatten.

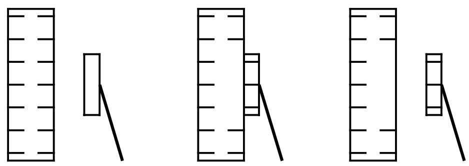
Flächenladungsdichte und elektrische Feldkonstante

Definition: Die Flächenladungsdichte σ einer über eine Fläche A gleichmäßig verteilten Ladung Q ist der Quotient aus der Ladung Q und dem Flächeninhalt A:

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{A}}.$$

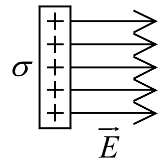
Einheit: $1\ \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$

Messung der Flächenladungsdichte:
Man hält eine Influenzplatte, das ist eine Metallplatte an einem Isolierstil, an die Fläche, und misst die auf die Influenzplatte geflossene Ladung Q mit einem Messverstärker. Hat die Influenzplatte die Fläche A, dann ist die Flächenladungsdichte $\sigma = \dfrac{Q}{A}$.



Man weist experimentell nach, dass in einem homogenen elektrischen Feld im Vakuum (bzw. näherungsweise in Luft) der Betrag E der Feldstärke proportional zur Flächenladungsdichte σ der felderzeugenden Ladung ist. Also gilt

$$\sigma = \text{Proportionalitätsfaktor} \cdot E$$



Definition: Dieser Proportionalitätsfaktor heißt elektrische Feldkonstante ε_0; es ist

$$\boxed{\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}}}.$$

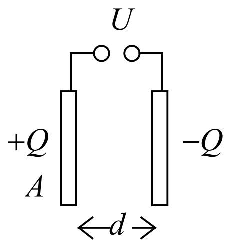
Also gilt für ein homogenes elektrisches Feld in Vakuum (bzw. näherungsweise in Luft):

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot E.$$

Kondensatoren und Kapazität

Legt man an zwei Kondensatorplatten der Plattenfläche A mit dem Plattenabstand d, zwischen denen Vakuum ist, eine Spannung U, dann werden die Platten mit den Ladungen $+Q$ bzw. $-Q$ geladen. Es gilt

$$Q = \sigma \cdot A = \varepsilon_0 E \cdot A = \varepsilon_0 \cdot \frac{U}{d} \cdot A = \underbrace{\varepsilon_0 \frac{A}{d}}_{\text{konstant}} \cdot U.$$



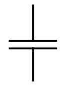
Also ist Q proportional zu U, und der Quotient $\dfrac{Q}{U}$ („Ladung pro Spannungseinheit“) ist konstant, d. h. unabhängig von U. Dieser Quotient ist ein Maß für das Fassungsvermögen des Kondensators.

Definition: Die Kapazität C eines Kondensators ist der Quotient aus der Ladung Q und der Spannung U:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}.$$

Einheit: $1\ \mathrm{F} = 1\ \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$ (Farad)

Daraus ergibt sich die übliche Einheit der elektrischen Feldkonstanten: $\boxed{\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{F}}{\text{m}}}$.

Schaltzeichen eines Kondensators: 

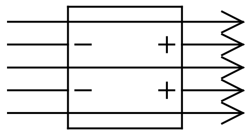
Füllt man den Plattenzwischenraum mit einem Dielektrikum, d. h. einem Isolator, dann vergrößert sich die Kapazität. Wie stark sich die Kapazität vergrößert, hängt vom Stoff ab.

Definition: Die Dielektrizitätszahl ε_r eines Stoffes gibt an, auf das Wievielfache sich die Kapazität im Vergleich zu Vakuum vergrößert.

Warum vergrößert ein Dielektrikum die Kapazität?
In einem Dielektrikum, das von einem elektrischen Feld durchsetzt wird, tritt Polarisation auf:

1. In jedem Dielektrikum tritt Verschiebungspolarisation auf: die Elektronen in den Atomhüllen verschieben sich ein wenig.
2. Enthält das Dielektrikum Moleküle mit einer unsymmetrischen Ladungsverteilung, dann tritt zusätzlich Orientierungspolarisation auf: Die Moleküle richten sich in dem elektrischen Feld (teilweise) aus.

In dem Dielektrikum entsteht ein elektrisches Gegenfeld. Dadurch wird das elektrische Feld im Dielektrikum geschwächt.



Ein Dielektrikum in einem Kondensator bewirkt also, dass die Feldstärke E kleiner wird; damit wird auch die Spannung $U = E \cdot d$ kleiner, also die Kapazität $C = \frac{Q}{U}$ größer.

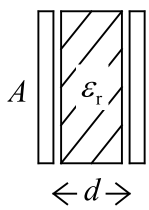
Aus der oben hergeleiteten, im Vakuum gültigen Gleichung $Q = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot U$, also

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot U}{U} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

und aus der Definition von ε_r folgt:

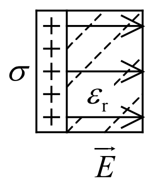
Die Kapazität eines Kondensators mit der Plattenfläche A und dem Plattenabstand d, dessen Plattenzwischenraum mit einem Stoff der Dielektrizitätszahl ε_r gefüllt ist, beträgt

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \varepsilon_\text{r} \frac{A}{d}}.$$



In einem Dielektrikum der Dielektrizitätszahl ε_r gilt für den Zusammenhang zwischen der Flächenladungsdichte σ und der Feldstärke E (Betrachte für die Herleitung einen Kondensator):

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{CU}{A} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\text{r} \frac{A}{d} \cdot U}{A} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\text{r} U}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_\text{r} \frac{U}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_\text{r} E,$$



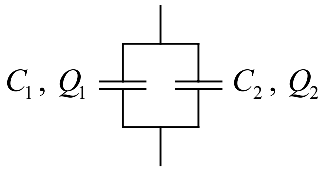
also

$$\boxed{\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon_\text{r} E}.$$

<u>Bestimmung</u> der elektrischen Feldkonstanten ε_0:

- erste Möglichkeit: Verwende die Gleichung $\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} E$.
- zweite Möglichkeit: Verwende die Gleichung $C = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \dfrac{A}{d}$.

<u>Parallelschaltung von Kondensatoren:</u>



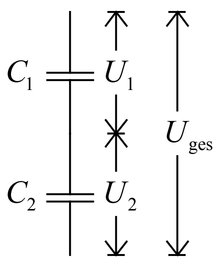
Die Spannungen sind gleich: $U_1 = U_2$. Schreibe hierfür U.
Die Ladungen addieren sich: $Q_\mathrm{ges} = Q_1 + Q_2$
Also gilt für die Gesamtkapazität:

$$C_\mathrm{ges} = \frac{Q_\mathrm{ges}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} = C_1 + C_2,$$

also

$$\boxed{C_\mathrm{ges} = C_1 + C_2}.$$

<u>Reihenschaltung</u> von Kondensatoren:



Die Spannungen addieren sich: $U_\mathrm{ges} = U_1 + U_2$
Die Ladungen sind gleich (!): $Q_1 = Q_2$. Schreibe hierfür Q.
Also gilt für den Kehrwert der Gesamtkapazität:

$$\frac{1}{C_\mathrm{ges}} = \frac{1}{\frac{Q}{U_\mathrm{ges}}} = \frac{U_\mathrm{ges}}{Q} = \frac{U_1 + U_2}{Q} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} = \frac{1}{\frac{Q}{U_1}} + \frac{1}{\frac{Q}{U_2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2},$$

also

$$\boxed{\frac{1}{C_\mathrm{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}.$$

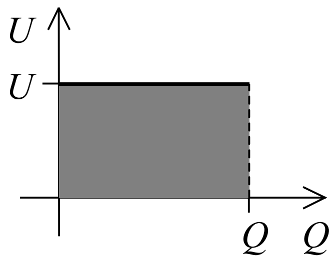
Energie elektrischer Felder

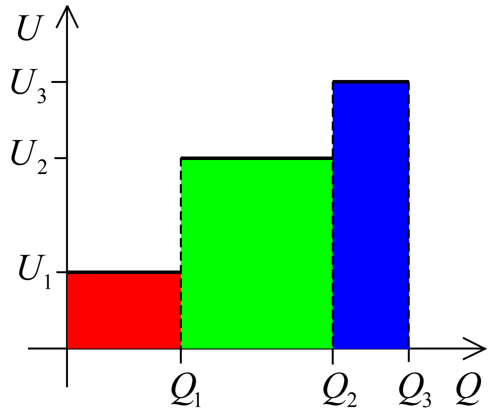
Wir wollen die Energie W berechnen, die nötig ist, um einen Kondensator auf die Spannung U aufzuladen. Im Prinzip ist $U = \dfrac{W}{Q}$, also $W = U \cdot Q$. Da sich die Spannung U während des Aufladens ändert, können wir diese Formel aber nicht direkt verwenden.

Wenn U konstant wäre, dann wäre

$$W = U \cdot Q.$$

Das ist die im Bild gefärbte Rechtecksfläche.



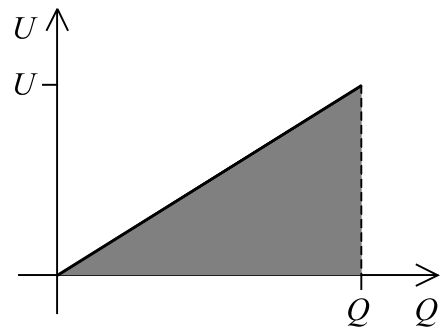


Wenn U abschnittsweise konstant wäre, dann wäre

$$W = \underline{U_1 \cdot Q_1} + \underline{U_2 \cdot (Q_2 - Q_1)} + \underline{U_3 \cdot (Q_3 - Q_2)}.$$

Das ist die im Bild gefärbte Summe der Rechtecksflächen.

Allgemein gilt: Die Energie W ist die <u>Fläche</u> zwischen dem $U(Q)$-Schaubild und der Q-Achse.



Damit können wir die Energie berechnen, die nötig ist, um einen Kondensator auf die Spannung U aufzuladen:
Aus $C = \frac{Q}{U}$ folgt $U = \frac{Q}{C}$, und das $U(Q)$-Schaubild ist eine Ursprungsgerade.
Die Energie W ist die Dreiecksfläche:

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot U .$$

Aus $C = \frac{Q}{U}$ folgt $Q = CU$, und Einsetzen ergibt

$$W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot CU \cdot U = \frac{1}{2} CU^2 .$$

Diese Energie wird im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert.

<u>Merke:</u> Die <u>Energie</u> des elektrischen Felds eines Kondensators der Kapazität C, der auf die Spannung U aufgeladen ist, beträgt

$$\boxed{W = \frac{1}{2} CU^2}.$$

<u>Definition:</u> Die <u>Energiedichte</u> ρ_{el} eines homogenen elektrischen Felds ist der Quotient aus der Energie W des Felds und dem Volumen V, das das Feld erfüllt:

$$\boxed{\rho_{\text{el}} = \frac{W}{V}}.$$

Für die Energiedichte ρ_{el} eines homogenen elektrischen Felds der Feldstärke E gilt (Betrachte für die Herleitung einen Kondensator):

$$\rho_{\text{el}} = \frac{W}{V} = \frac{\frac{1}{2} CU^2}{Ad} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\text{r}} \frac{A}{d} U^2}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{r}} \frac{U^2}{d^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{r}} E^2 ,$$

also

$$\boxed{\rho_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{r}} E^2}.$$

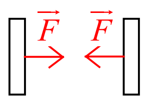
<u>Standardaufgabe:</u> Wie ändern sich die elektrischen Größen eines Kondensators, wenn man

a) den Plattenabstand bei angeschlossener Spannungsquelle verändert;
b) den Kondensator nach dem Aufladen von der Spannungsquelle trennt und dann den Plattenabstand verändert?

<u>Lösungsidee:</u>

a) Die Spannung bleibt gleich.
b) Die Ladung bleibt gleich.

Ohne Herleitung: Legt man an zwei Kondensatorplatten der Plattenfläche A und dem Plattenabstand d, deren Plattenzwischenraum mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätszahl ε_r gefüllt ist, die Spannung U, dann hat die <u>Kraft</u>, mit der sich die Platten gegenseitig anziehen, den Betrag



$$\boxed{F = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\frac{U^2}{d^2}A}.$$

Abhängigkeit von Größen

<u>Standardaufgabe:</u> Gegeben sind mehrere Wertepaare zweier Größen x und y. Bestimme, wie y von x abhängt, und gib eine Gleichung an, mit der man y in Abhängigkeit von x berechnen kann.

<u>1. y ist proportional zu x</u> ($y \sim x$)

anschaulich: Verdoppelt man x, dann verdoppelt sich y (näherungsweise).

rechnerisch: Der Quotient $\frac{y}{x}$ ist (näherungsweise) konstant.

zeichnerisch: Die Punkte $P(x \mid y)$ liegen (näherungsweise) auf einer Ursprungsgeraden.

Gleichung: Ist k der Mittelwert der Quotienten $\frac{y}{x}$ bzw. die Steigung der Regressionsgeraden, dann gilt $y = k \cdot x$.

<u>2. y ist umgekehrt proportional zu x bzw. proportional zum Kehrwert von x</u> ($y \sim \frac{1}{x}$)

anschaulich: Verdoppelt man x, dann halbiert sich y (näherungsweise).
rechnerisch: Das Produkt $y \cdot x$ ist (näherungsweise) konstant.

zeichnerisch: Die Punkte $P\left(\frac{1}{x} \middle| y\right)$ liegen (näherungsweise) auf einer Urprungsgeraden.

Gleichung: Ist k der Mittelwert der Produkte $y \cdot x$ bzw. die Steigung der Regressionsgeraden, dann gilt $y = k \cdot \frac{1}{x}$.

<u>3. y hängt quadratisch von x ab</u> ($y \sim x^2$)

anschaulich: Verdoppelt man x, dann vervierfacht sich y (näherungsweise).

rechnerisch: Der Quotient $\frac{y}{x^2}$ ist (näherungsweise) konstant.

zeichnerisch: Die Punkte $P(x^2 \mid y)$ liegen (näherungsweise) auf einer Urprungsgeraden.

Gleichung: Ist k der Mittelwert der Quotienten $\frac{y}{x^2}$ bzw. die Steigung der Regressionsgeraden, dann gilt $y = k \cdot x^2$.

4. y ist proportional zu $\frac{1}{x^2}$ ($y \sim \frac{1}{x^2}$)

anschaulich: Verdoppelt man x, dann sinkt der Wert von y (näherungsweise) auf ein Viertel.
rechnerisch: Die Produkte $y \cdot x^2$ sind (näherungsweise) konstant.

Gleichung: Ist k der Mittelwert der Produkte $y \cdot x^2$, dann gilt $y = k \cdot \frac{1}{x^2}$.

5. y ist proportional zu $\sqrt{x}$ ($y \sim \sqrt{x}$)

anschaulich: Verdoppelt man x, dann wächst der Wert von y (näherungsweise) auf das $\sqrt{2}$ -fache.
Oder: Vervierfacht man x, dann verdoppelt sich y.

rechnerisch: Der Quotient $\frac{y}{\sqrt{x}}$ ist (näherungsweise) konstant.

Gleichung: Ist k der Mittelwert der Quotienten $\frac{y}{\sqrt{x}}$, dann gilt $y = k \cdot \sqrt{x}$.

Ergänzung:
Hängt eine Größe y von zwei Größen x_1 und x_2 ab und ist

1. $y \sim x_1$ (bei konstantem x_2) und
2. $y \sim x_2$ (bei konstantem x_1),

dann ist $y \sim x_1 \cdot x_2$.

Beispiel: Eine Größe y hängt von zwei Größen a und b ab, und es gilt

1. $y \sim a^2$ (bei konstantem b) und
2. $y \sim \frac{1}{b}$ (bei konstantem a).

Dann ist $y \sim a^2 \cdot \frac{1}{b}$ bzw. $y \sim \frac{a^2}{b}$.

Also gilt $y = k \cdot \frac{a^2}{b}$.