Aufgaben mit Lösungen zu: Quantenphysik

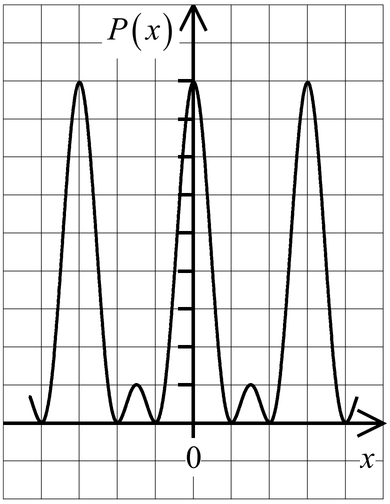
1) In einem Experiment werden einzelne Helium-Atom der De-Broglie-Wellenlänge 30 pm durch einen Doppelspalt geschickt. Der Spaltabstand beträgt $8\ \mu\text{m}$. Die Entfernung der Detektionsebene von der Doppelspaltebene beträgt 1,0 m. Vernachlässige zunächst den Einfluss der Einzelspaltinterferenz.

- Bestimme einen Abstand $x \neq 0$, bei dem ein relatives Maximum der Auftreffwahrscheinlichkeit besteht.
- Wie groß ist das Verhältnis $\frac{P(x_1)}{P(x_2)}$ der Auftreffwahrscheinlichkeiten für zwei Punkte im Abstand $x_1 = 5\ \mu\text{m}$ und $x_2 = 7{,}5\ \mu\text{m}$ von der optischen Achse?

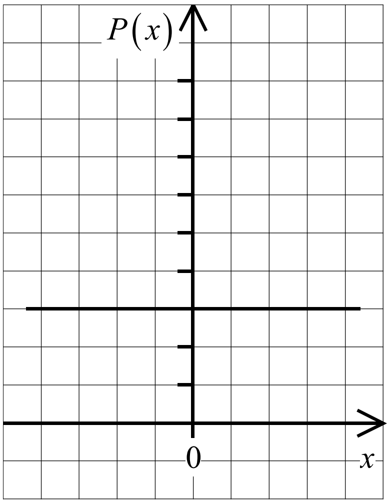
Die Einzelspaltbreite beträgt $1\ \mu\text{m}$.

- Wie wirkt sich dies auf das Verhältnis der Auftreffwahrscheinlichkeiten aus? Begründe die Antwort.

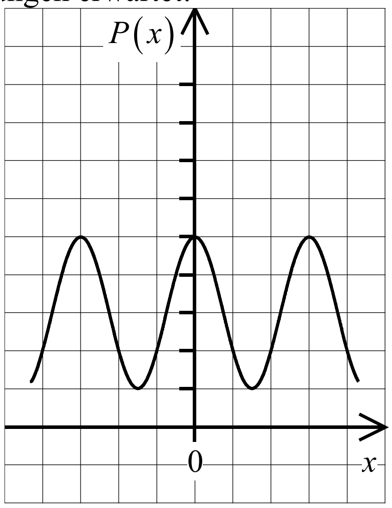
2) In einem Experiment treffen Elektronen auf einen Dreifachspalt. Hinter dem Dreifachspalt befindet sich eine Detektorplatte. Aufgrund der Geometrie der Anordnung ist keine Abnahme der Intensität zum Rand hin beobachtbar. Durch eine geeignete Anordnung kann zuverlässig nachgewiesen werden, ob ein Elektron einen der Spalte passiert hat. Es werden nun drei Versuche mit dieser Anordnung durchgeführt:
Versuch 1: Es wird keiner der drei Spalte überwacht.
Versuch 2: Es wird genau ein Spalt überwacht.
Versuch 3: Es werden zwei Spalte überwacht.
Bei den Versuchen werden folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen erwartet:



Wahrscheinlichkeitsverteilung 1



Wahrscheinlichkeitsverteilung 2



Wahrscheinlichkeitsverteilung 3

- Ordne die Wahrscheinlichkeitsverteilungen den Versuchen zu und begründe die Entscheidungen.
- Erläutere das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten $P(0)$.

3) Aus der beobachteten Breite einer bestimmten Spektrallinie kann man abschätzen, dass die Wellenlänge der zugehörigen Photonen unbestimmt ist und im Bereich zwischen 577 nm und 580 nm liegt.

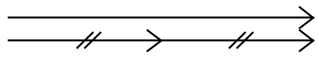
- Bestimme daraus die Unbestimmtheit des Impulses der Photonen.
- Schätze mithilfe der Unbestimmtheitsrelation die Ortsunbestimmtheit ab.

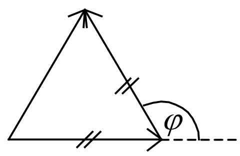
Lösungen

1) <u>Abstand x, bei dem ein relatives Maximum der Auftreffwahrscheinlichkeit besteht:</u>
Da beim Durchgang von Quantenobjekten durch einen Doppelspalt die auftretenden Winkel klein sind, ist die Näherung $\sin\alpha = \tan\alpha$ zulässig. Also gilt für den Abstand x eines Maximums 1. Ordnung von der Schirmmitte (λ: De-Broglie-Wellenlänge; g: Spaltabstand; a: Schirmabstand):

$$\frac{\lambda}{g} = \frac{x}{a}$$

$$x = \frac{\lambda a}{g} = \frac{3 \cdot 10^{-11}\text{ m} \cdot 1\text{ m}}{8 \cdot 10^{-6}\text{ m}} = 3{,}75 \cdot 10^{-6}\text{ m} = 3{,}75\ \mu\text{m}$$

Weitere Maxima gibt es für ganzzahlige Vielfache von $x = 3{,}75$ pm.
<u>Verhältnis der Auftreffwahrscheinlichkeiten:</u>
Für $x_2 = 7{,}5$ pm erhält man ein relatives Maximum; dort ist der Gangunterschied 2λ.
Zeigermodell: 
Die Länge der Zeiger ist willkürlich, da nur relative Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden. Am einfachsten ist es, die Länge 1 zu wählen.
Der Summenzeiger hat die Länge 2, also ist $P(x_2) = 2^2 = 4$.
Für $x_1 = 5$ pm beträgt der Gangunterschied $\frac{5\text{ pm}}{3{,}75\text{ pm}} \cdot \lambda = \frac{4}{3}\lambda$ und damit der Phasenunterschied $\varphi = 120°$.

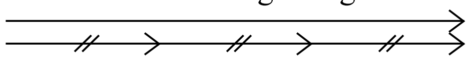
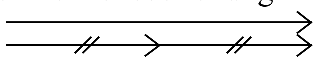
Zeigermodell: 

In dem gleichseitigen Dreieck hat der Summenzeiger die Länge 1, also ist $P(x_1) = 1^2 = 1$.
Also ist $\frac{P(x_1)}{P(x_2)} = \frac{1}{4}$.
<u>Verhältnis der Auftreffwahrscheinlichkeiten bei Berücksichtigung der Einzelspaltbreite:</u>
Eine Einzelspaltbreite von 1 μm bewirkt, dass das achte Doppelspaltmaximum unterdrückt ist. Bis zu dieser Stelle fällt die Einzelspaltfunktion streng monoton. Für $x_1 = 5\ \mu$m ist die Unterdrückung also noch nicht so groß wie für $x_2 = 7{,}5\ \mu$m. Also ist das Verhältnis der Auftreffwahrscheinlichkeiten größer als $\frac{1}{4}$.

2) <u>Zuordnung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu den Versuchen:</u>
Wahrscheinlichkeitsverteilung 1 erwartet man bei Versuch 1.
Begründung: Da nicht entscheidbar ist, welchen Spalt ein Elektron passiert, tritt Interferenz am Dreifachspalt auf, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht der aus der Optik bekannten Intensitätsverteilung bei einem Dreifachspalt mit je zwei Minima zwischen zwei benachbarten Hauptmaxima.
Wahrscheinlichkeitsverteilung 2 erwartet man bei Versuch 3.
Begründung: Wenn zwei Spalte überwacht werden, kann man entscheiden, welchen der drei Spalte ein Elektron passiert hat, denn wenn ein Elektron detektiert wird, das keinen der beiden überwachten Spalte passiert hat, dann hat es den dritten Spalt passiert. Also tritt keine Interferenz auf, d. h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Summe dreier Wahr-

scheinlichkeitsverteilungen beim Durchgang durch einen Einzelspalt.
Bemerkung: Da keine Abnahme der Intensität zum Rand hin beobachtbar ist, ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreffen überall gleich.
Wahrscheinlichkeitsverteilung 3 erwartet man bei Versuch 2.
Begründung: Da nicht entscheidbar ist, welchen der beiden nicht überwachten Spalten ein Elektron passiert hat, tritt Interferenz am Doppelspalt auf, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht der aus der Optik bekannten Intensitätsverteilung beim Doppelspalt. Der überwachte Spalt trägt nicht zur Interferenz bei. Also erwartet man die Summe der Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Doppelspalt und der Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Einzelspalt (die hier als konstant betrachtet wird).

Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten $P(0)$:

An der Stelle $x = 0$ ist der Gangunterschied 0.
Die Wahrscheinlichkeiten kann man mit dem Zeigermodell erklären. Da nur relative Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden, kann man annehmen, dass die Zeiger die Länge 1 haben.
Bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung 1 tragen alle drei Spalte zur Interferenz bei:
Zeigermodell: 
Der Summenzeiger hat die Länge 3, also ist $P(0) = 3^2 = 9$.
Bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung 2 tritt keine Interferenz auf. Die Wahrscheinlichkeit beim Durchgang durch *einen* Spalt wird durch *einen* Zeiger der Länge 1 beschrieben; also ist diese Wahrscheinlichkeit $1^2 = 1$. Da keine Interferenz auftritt, ist $P(0)$ die Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten, also $P(0) = 1 + 1 + 1 = 3$.
Bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung 3 tritt Interferenz am Doppelspalt auf:
Zeigermodell: 
Der Summenzeiger hat die Länge 2, also ist die Wahrscheinlichkeit für den Durchgang durch die beiden Spalte $2^2 = 4$.
Der überwachte dritte Spalt trägt nicht zur Interferenz bei. Die Wahrscheinlichkeit für einen Durchgang durch diesen Spalt ist (vgl. oben) $1^2 = 1$. Da keine Interferenz auftritt, ist $P(0)$ die Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten, also $P(0) = 4 + 1 = 5$.

3) Unbestimmtheit der Photonenimpulse:
Für den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge λ und dem Impuls p eines Quantenobjekts gilt $\lambda = \frac{h}{p}$ bzw. $p = \frac{h}{\lambda}$.
Photonenimpulse:

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{577 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} \approx 1{,}149047 \cdot 10^{-27}\ \text{Ns}$$

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{580 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} \approx 1{,}143103 \cdot 10^{-27}\ \text{Ns}$$

Unbestimmtheit des Photonenimpulses: $\Delta p = p_1 - p_2 \approx 0{,}00594 \cdot 10^{-27}\ \text{Ns} = 5{,}94 \cdot 10^{-30}\ \text{Ns}$
Bemerkung: Die Photonenimpulse sind auf mehr als drei geltende Ziffern berechnet, damit die Differenz auf drei geltende Ziffern korrekt ist.

<u>Ortsunbestimmtheit:</u>

Die Ortsunbestimmtheit Δx ergibt sich aus der UBR:

$\Delta x \cdot \Delta p \approx h$

$$\Delta x \approx \frac{h}{\Delta p} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{5{,}94 \cdot 10^{-30}\ \text{Ns}} \approx 1{,}12 \cdot 10^{-4}\ \text{m}\ (= 112\ \mu\text{m})$$