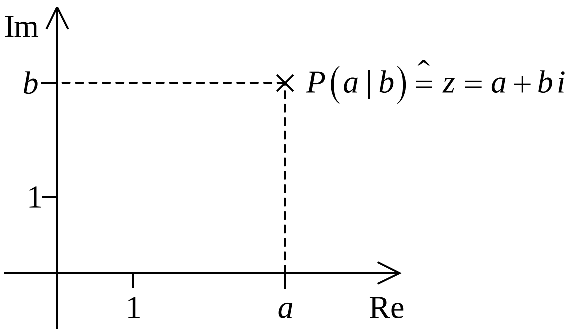
Zusammenfassung: Komplexe Zahlen

Inhaltsverzeichnis

Komplexe Zahlenebene

Bekanntlich kann man jeden Punkt der Ebene mit zwei Koordinaten beschreiben. Ist die erste Koordinate *a* und die zweite Koordinate *b*, dann schreibt man den Punkt in der Form $P(a\,|\,b)$.



Definition: Jeden Punkt $P(a\,|\,b)$ der Ebene kann man als eine komplexe Zahl

$$\boxed{z = a + bi}$$

schreiben.

Fasst man die Punkte der Ebene als komplexe Zahlen auf, dann nennt man die Ebene die komplexe Zahlenebene.

Definition: Die Menge

$$\mathbb{C} = \{ z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

heißt Menge der komplexen Zahlen.

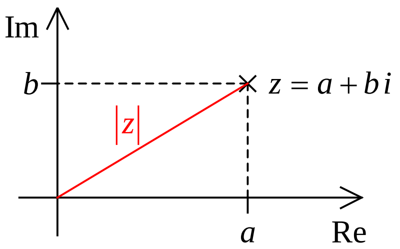
Definition: Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ heißt *a* der Realteil und *b* der Imaginärteil.
Schreibweise: $a = \mathrm{Re}(z)$ und $b = \mathrm{Im}(z)$.

Zahlen der Form $z = a$ (also Imaginärteil $b = 0$) liegen auf der Rechtsachse, die man in der komplexen Zahlenebene die reelle Achse nennt. Diese Zahlen sind die reellen Zahlen, und die reelle Achse ist die gewöhnliche Zahlengerade. Jede reelle Zahl ist also eine spezielle komplexe Zahl.

Zahlen der Form $z = bi$ (also Realteil $a = 0$) heißen imaginäre Zahlen. Sie liegen auf der Hochachse, die man in der komplexen Zahlenebene die imaginäre Achse nennt.

Definition: Der Betrag einer komplexen Zahl $z = a + bi$ ist

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Der Betrag einer komplexen Zahl ist der Abstand der Zahl in der komplexen Zahlenebene vom Ursprung.

Für eine reelle Zahl $z = a + 0i$ ist $\sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, also der übliche Betrag.

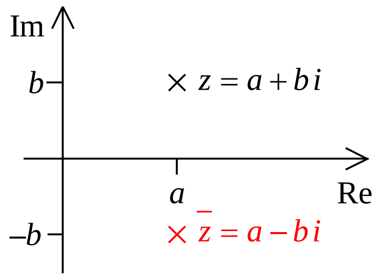
Beispiel: $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist in der komplexen Zahlenebene der Kreis um 0 mit dem Radius 1.

Definition: Für eine komplexe Zahl $z = a + b\,i$ heißt

$$\boxed{\overline{z} = a - b\,i}$$

die konjugiert komplexe Zahl.

Die konjugiert komplexe Zahl entsteht durch eine Spiegelung an der reellen Achse.

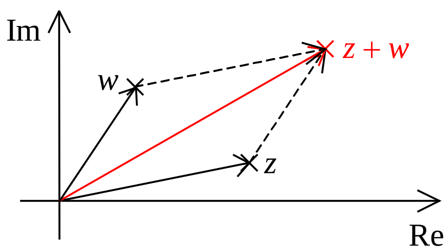


Für eine reelle Zahl ist die konjugiert komplexe Zahl gleich der Zahl selbst.

Rechnen mit komplexen Zahlen

Definition (Addition): $(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i$

Deutung in der komplexen Zahlenebene:
Den komplexen Zahlen $z = a + b\,i$ und $w = c + d\,i$ entsprechen die Punkte $P(a \mid b)$ und $Q(c \mid d)$ mit den Ortsvektoren $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.
Der Summe $z + w$ entspricht der Punkt mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$.



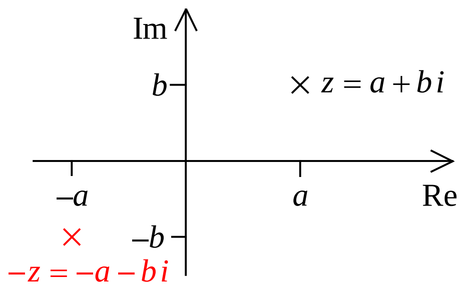
Für reelle Zahlen $z = a + 0i$ und $w = c + 0i$ ist $z + w = (a + c) + (0 + 0)i = a + c$, also die übliche Addition.

Feststellung: Für die Addition komplexer Zahlen gilt:

1. das Kommutativgesetz: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2. das Assoziativgesetz: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
3. es gibt ein neutrales Element: $z + 0 = z$;
4. jede Zahl $z = a + b\,i$ hat eine Gegenzahl, nämlich $-z = -a - b\,i$, so dass gilt: $z + (-z) = 0$.

Für eine reelle Zahl $z = a + 0i$ ist die Gegenzahl $-z = -a - 0i = -a$, also die übliche Gegenzahl.

Die Gegenzahl entsteht durch eine Spiegelung am Ursprung.



Wie bei reellen Zahlen wird die Subtraktion definiert als die Addition der Gegenzahl:

Definition (Subtraktion): $z - w = z + (-w)$

Also ist $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

Der Abstand zweier reeller Zahlen a und b auf der Zahlengeraden ist $|a-b|$. Das gilt entsprechend für komplexe Zahlen:

Merke: Der Abstand zweier komplexer Zahlen z und w in der komplexen Zahlenebene ist

$$|z-w|.$$

Beispiel: $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-i|=1\}$ ist in der komplexen Zahlenebene der Kreis um i mit dem Radius 1.

Definition (Multiplikation): $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Beispiel: $i\cdot i=(0+1i)\cdot(0+1i)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+(0\cdot 1+1\cdot 0)i=-1$

Für reelle Zahlen $z=a+0i$ und $w=c+0i$ ist
$z\cdot w=(a+0i)\cdot(c+0i)=(ac-0\cdot 0)+(a\cdot 0+0\cdot c)=a\cdot c$, also die übliche Multiplikation.

Feststellung: Für die Multiplikation komplexer Zahlen gilt:

1. das Kommutativgesetz: $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$;
2. das Assoziativgesetz: $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$;
3. es gibt ein neutrales Element: $z\cdot 1=z$.

Feststellung: Für die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen gilt das Distributivgesetz:

$$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3.$$

Tatsächlich muss man sich die Definition der Multiplikation nicht merken, sondern man schreibt die komplexen Zahlen in Klammern, multipliziert wie üblich aus und ersetzt $i\cdot i$ durch -1.

Beispiel:
$(2+3i)\cdot(4+5i)=2\cdot 4+2\cdot 5i+3i\cdot 4+3i\cdot 5i=8+10i+12i+15ii=8+22i-15=-7+22i$

Definition (n-te Potenz): $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\text{ Faktoren}}\quad(n=1,2,3,\ldots)$

Beispiel: $i^2=i\cdot i=-1$

Feststellung: Jede komplexe Zahl $z=a+bi$, $z\neq 0$ hat eine Kehrzahl, nämlich

$$z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i,$$

so dass gilt: $z\cdot z^{-1}=1$.

Beweis: Es ist $z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$, also

$$z\cdot z^{-1}=(a+bi)\cdot\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{a^2-(bi)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1.\qquad\square$$

Bemerkung: Es ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, also $z \cdot z^{-1} = z \cdot \frac{\overline{z}}{|z^2|} = \frac{z \cdot \overline{z}}{|z^2|}$. Wegen $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ ist $z \cdot z^{-1} = 1$.

Für eine reelle Zahl $z = a + 0i$ ist $z^{-1} = \frac{a}{a^2+0^2} - \frac{0}{a^2+0^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$, also die übliche Kehrzahl.

Definition (Division): $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$ ($w \neq 0$)

Diese Definition ergibt für reelle Zahlen die übliche Division.

Tatsächlich muss man sich die Definition der Division nicht merken, sondern man erweitert den Bruch mit dem komplex konjugierten Nenner und wendet die dritte binomische Formel an.

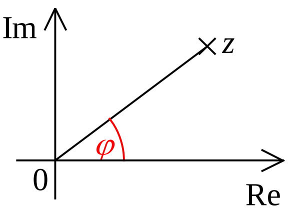
Beispiel: $\frac{4+5i}{6+8i} = \frac{(4+5i)\cdot(6-8i)}{(6+8i)\cdot(6-8i)} = \frac{24-32i+30i+40}{36+64} = \frac{64-2i}{100} = \frac{64}{100} - \frac{2}{100}i = \frac{16}{25} - \frac{1}{50}i$

Für Experten: Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.

Polarform komplexer Zahlen

Feststellung und Definition: Jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ kann man den Winkel φ zwischen der positiven reellen Achse und der Strecke $\overline{0z}$ zuordnen, wobei $-180° < \varphi \leq 180°$ gilt. Dieser Winkel heißt das Argument von *z*.

Schreibweise: $\arg(z)$



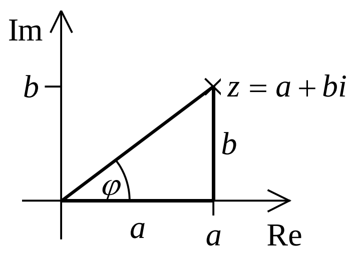
Beispiel: $\arg(i) = 90°$

Berechnung von $\varphi = \arg(z)$:

Sonderfälle:

1. *z* reell, also $z = a$:
   a) $a > 0$: $\varphi = 0°$
   b) $a < 0$: $\varphi = 180°$
2. *z* imaginär, also $z = bi$:
   c) $b > 0$: $\varphi = 90°$
   d) $b < 0$: $\varphi = -90°$

Allgemeiner Fall: Für $z = a + bi$ ist $\boxed{\tan\varphi = \frac{b}{a}}$.



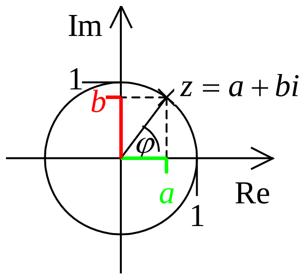
Achtung: Im Fall

1. $a < 0$ und $b > 0$ ist $90° < \varphi < 180°$, und man muss 180° zum WTR-Ergebnis addieren.
   Beispiel: $z = -3 + 2i$
   $$\tan\varphi = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$
   $$\varphi \approx -33{,}7° + 180° = 146{,}3°$$
2. $a < 0$ und $b < 0$ ist $-180° < \varphi < -90°$, und man muss 180° vom WTR-Ergebnis subtrahieren.
   Beispiel: $z = -3 - 2i$
   $$\tan\varphi = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$
   $$\varphi \approx 33{,}7° - 180° = -146{,}3°$$

Eine komplexe Zahl $z = a + bi$, $z \neq 0$ kann man mit ihrem Betrag $r = |z|$ und ihrem Argument $\varphi = \arg(z)$ darstellen:

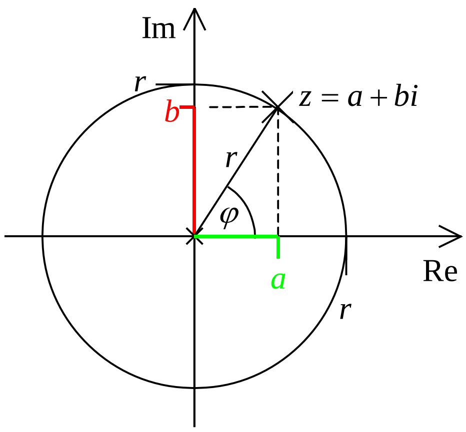
Im Sonderfall $r = 1$ (Vergleiche „Sinus und Kosinus im Einheitskreis“) gilt

$$a = \cos\varphi$$
$$b = \sin\varphi$$



Im allgemeinen Fall mit beliebigem r denkt man sich das obige Bild zentrisch gestreckt, mit dem Ursprung als Streckzentrum und dem Streckfaktor r. Dann erhält man

$$a = r \cdot \cos\varphi$$
$$b = r \cdot \sin\varphi$$



Also gilt $z = a + bi = r\cdot\cos\varphi + r\cdot\sin\varphi\cdot i = r\cdot(\cos\varphi + \sin\varphi\cdot i)$. Das ist die Darstellung mit dem Betrag und dem Argument:

Definition: Die Polarform einer komplexen Zahl $z \neq 0$ ist
$$\boxed{z = r\cdot(\cos\varphi + \sin\varphi\cdot i)} \quad \text{mit } r = |z| \text{ und } \varphi = \arg(z).$$

Im Gegensatz zur Polarform heißt die Darstellung $z = a + bi$ die Normalform.

Umrechnung von der Normalform $z = a + b\,i$ in die Polarform $z = r \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi \cdot i)$:

1. $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. Bestimme $\varphi = \arg(z)$ wie oben erläutert.

Umrechnung von der Polarform $z = r \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi \cdot i)$ in die Normalform $z = a + bi$:
$z = r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i$, also $a = r \cdot \cos\varphi$ und $b = r \cdot \sin\varphi$.

Feststellung (Beweis siehe „Für Experten"): Für komplexe Zahlen $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cdot i)$ und $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot i)$ ist

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot i\right)}.$$

Also gilt:

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und
- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
  Für Experten: Man muss evtl. 360° addieren oder subtrahieren.

Merke: Bei der Multiplikation komplexer Zahlen

- multiplizieren sich die Beträge und
- addieren sich die Argumente.

Durch *n*-fache Anwendung dieser Formel bzw. durch vollständige Induktion folgt der

Satz (Formel von Moivre): Die *n*-te Potenz ($n = 1, 2, 3, \ldots$) einer komplexen Zahl $z = r \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi \cdot i)$ ist

$$\boxed{z^n = r^n \cdot \left(\cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi) \cdot i\right)}.$$

Also gilt:

- $|z^n| = |z|^n$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$
  Für Experten: Man muss eventuell 360° oder ein Vielfaches von 360° addieren oder subtrahieren.

Wurzeln komplexer Zahlen

Definition: Gegeben ist eine komplexe Zahl *z* und eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Eine komplexe Zahl *w* mit

$$w^n = z$$

heißt eine *n*-te Wurzel von *z*; im Fall $n = 2$ heißt *w* eine Quadratwurzel von *z*.

Liest man die Formel von Moivre „rückwärts", dann erhält man den

Satz: Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ hat eine *n*-te Wurzel ($n = 2, 3, 4, \ldots$), nämlich die Zahl *w* mit

$$\boxed{|w| = \sqrt[n]{|z|}} \quad \text{und} \quad \boxed{\arg(w) = \frac{\arg(z)}{n}}.$$

Also ist $\operatorname{Re}(w) = \sqrt[n]{|z|} \cdot \cos\left(\frac{\arg(z)}{n}\right)$ und $\operatorname{Im}(w) = \sqrt[n]{|z|} \cdot \sin\left(\frac{\arg(z)}{n}\right)$.

Standardaufgabe: Berechne eine *n*-te Wurzel *w* einer komplexen Zahl $z = a + bi$.

Lösung:

1. Berechne $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Berechne $\tan(\arg(z)) = \frac{b}{a}$

   $\arg(z) = \ldots$

   Achtung: Im Fall $a < 0$ und $b > 0$ muss man 180° zum WTR-Ergebnis addieren, und im Fall $a < 0$ und $b < 0$ muss man 180° vom WTR-Ergebnis subtrahieren!
3. Berechne $\operatorname{Re}(w) = \sqrt[n]{|z|} \cdot \cos\left(\frac{\arg(z)}{n}\right)$ und $\operatorname{Im}(w) = \sqrt[n]{|z|} \cdot \sin\left(\frac{\arg(z)}{n}\right)$.

Feststellung: Ist die Zahl w_1 eine *n*-te Wurzel der Zahl $z \neq 0$ ($n = 2, 3, 4, \ldots$), dann erhält man eine weitere *n*-te Wurzel w_2 von *z*, indem man das Argument von w_1 um $\frac{360°}{n}$ vergrößert.

Beweis: Da w_1 eine *n*-te Wurzel von *z* ist, gilt $n \cdot \arg(w_1) = \arg(z)$. Daraus folgt

$$n \cdot \arg(w_2) = n \cdot \left(\arg(w_1) + \frac{360°}{n}\right) = n \cdot \arg(w_1) + 360° \mathrel{\widehat{=}} n \cdot \arg(w_1) = \arg(z).$$

Also ist auch w_2 eine *n*-te Wurzel von *z*. □

Folgerung: Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ hat für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ mindestens *n* verschiedene *n*-te Wurzeln.

Beweis: Man kann das Argument einer *n*-ten Wurzel *n*-mal um $\frac{360°}{n}$ erhöhen, bis man das ursprüngliche Argument plus 360° und damit die ursprüngliche *n*-te Wurzel erhält. □

Feststellung: Eine komplexe Zahl *z* hat für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ höchstens *n* verschieden *n*-te Wurzeln.

Beweis: Eine *n*-te Wurzel von *z* ist eine Nullstelle des Polynoms $x^n - z = 0$, und wie im Reellen hat ein Polynom vom Grad *n* höchstens *n* Nullstellen. □

Daraus folgt der

Satz: Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ hat für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ genau *n* verschiedene *n*-te Wurzeln.

Bei reellen Zahlen ist das bekanntlich anders:

1. Eine positive reelle Zahl *x* hat genau eine reelle *n*-te Wurzel, nämlich $\sqrt[n]{x}$.
2. Ist *x* eine negative reelle Zahl und *n* ungerade, dann hat *x* genau eine reelle *n*-te Wurzel, nämlich $-\sqrt[n]{|x|}$.

3. Ist x eine negative reelle Zahl und n gerade, dann hat x keine n-te Wurzel.

Fall $n = 2$: Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ hat zwei verschiedene Quadratwurzeln:

1. Die Zahl w_1 mit $|w_1| = \sqrt{|z|}$ und $\arg(w_1) = \dfrac{\arg(z)}{2}$;
2. die Zahl $w_2 = -w_1$.

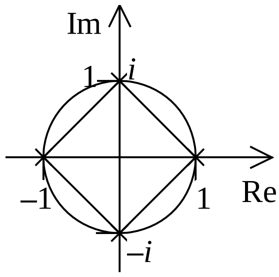
Sonderfall: Eine negative reelle Zahl x hat die beiden Quadratwurzeln $w_1 = \sqrt{|x|}\,i$ und $w_2 = -\sqrt{|x|}\,i$.

Beispiel: Die Zahl -1 hat die beiden Quadratwurzeln i und $-i$.

Alle n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl z haben denselben Betrag $\sqrt[n]{|z|}$, und ihre Argumente unterscheiden sich jeweils um $\dfrac{360°}{n}$. Daraus folgt die

Feststellung: In der komplexen Zahlenebene liegen die n-ten Wurzeln ($n \geq 2$) einer Zahl $z \neq 0$ auf dem Kreis um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt[n]{|z|}$, und sie sind die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks.

Beispiel: Die vierten Wurzeln von 1 sind i, -1, $-i$ und 1. Sie liegen auf dem Einheitskreis und sind die Ecken eines Quadrats.



Feststellung: Ist die Zahl w eine n-te Wurzel der Zahl z, dann ist $\overline{w}$ eine n-te Wurzel von $\overline{z}$.

Beweis: Da w eine n-te Wurzel von z ist, gilt $w^n = z$. Man kann nachrechnen, dass $\overline{w}^2 = \overline{w^2}$ gilt. Daraus folgt durch vollständige Induktion: $\overline{w}^n = \overline{w^n}$. Also ist $\overline{w}^n = \overline{z}$, d. h. $\overline{w}$ ist eine n-te Wurzel von $\overline{z}$. □

Formel von Cardano

Für eine spezielle Form einer Gleichung dritten Grades gibt es eine Lösungsformel:

Satz (Formel von Cardano; ohne Beweis): Gegeben ist eine Gleichung der Form

$$x^3 + px + q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{R}).$$

Bei geeigneter Wahl der Wurzeln ist

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \quad \text{mit} \quad D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

eine reelle Lösung der Gleichung.

Es gibt zwei Fälle:

1. Ist $D \geq 0$, dann ist $\sqrt{D}$ eine reelle Zahl, und bei der Berechnung der Lösung treten nur reelle Zahlen auf, weil man als dritte Wurzel einer reellen Zahl immer eine reelle Zahl nehmen kann.

2. Ist $D < 0$, dann ist
$$\sqrt{D} = \sqrt{|D|}\, i\,.$$
Setzt man
$$z := -\frac{q}{2} + \sqrt{D}\,,$$
dann lautet die Formel von Cardano:
$$x = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\,.$$
Ist *w* eine dritte Wurzel von *z*, dann ist $\overline{w}$ eine dritte Wurzel von $\overline{z}$.
Also ergibt die Formel von Cardano die Lösung
$$x = w + \overline{w}\,.$$
Die Zahl *x* ist eine reelle Zahl, denn für jede komplexe Zahl $w = a + b\,i$ ist
$$w + \overline{w} = (a + b\,i) + (a - b\,i) = 2a = 2 \cdot \mathrm{Re}(w)\,.$$

Standardaufgabe: Bestimme eine reelle Lösung der Gleichung $x^3 + px + q = 0$.

Lösung:

1. Berechne $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$.
2. Fall $D > 0$: Berechne $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$.

   Fall $D < 0$:
3. Berechne $z = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}$ mit $\sqrt{D} = \sqrt{|D|}\, i$.
4. Berechne den Realteil $\mathrm{Re}(w) = \sqrt[3]{|z|} \cdot \cos\left(\frac{\arg(z)}{3}\right)$ einer dritten Wurzel *w* von *z*.
5. Berechne $x = 2 \cdot \mathrm{Re}(w)$.

Bemerkung: Eine (beliebige) Gleichung dritten Grades
$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (b, c, d \in \mathbb{R})$$
kann durch eine geeignete Substitution in eine Gleichung der Form
$$z^3 + pz + q = 0$$
überführt werden, siehe „Für Experten". Also kann man mit der Formel von Cardano beliebige Gleichungen dritten Grades lösen.

Nullstellen und Faktorisierung von Polynomen

Definition: Ein Polynom
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
heißt ein reelles Polynom (bzw. komplexes Polynom), wenn alle Koeffizienten a_0, a_1, …, a_n reelle Zahlen (bzw. komplexe Zahlen) sind.

Ein reelles Polynom ist also ein spezielles komplexes Polynom.

Bekanntlich hat ein reelles normiertes quadratisches Polynom

$$x^2 + px + q$$

die Nullstellen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \,.$$

Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, dann hat das Polynom die beiden komplex konjugierten Nullstellen

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left|\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right|} \cdot i \,.$$

Bemerkungen:

1. Eigentlich darf man im Komplexen das Wurzelzeichen nicht verwenden. Wegen $\pm$ ist das aber in Ordnung.
2. Das Polynom hat keine reelle Zerlegung, aber die komplexe Zerlegung $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - z_2)$.

Hat ein reelles Polynom $p(x)$ eine reelle Nullstelle x_0, dann lässt sich von $p(x)$ ein Linearfaktor $x - x_0$ abspalten, d. h. es gibt ein reelles Polynom $q(x)$ mit

$$p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) \,.$$

Entsprechend gilt: Hat ein (reelles oder komplexes) Polynom $p(x)$ eine komplexe Nullstelle z_0, dann lässt sich von $p(x)$ ein Linearfaktor $x - z_0$ abspalten, d. h. es gibt ein komplexes Polynom $q(x)$ mit

$$p(x) = (x - z_0) \cdot q(x) \,.$$

Feststellung: Für jede komplexe Zahl z gilt

$$(x - z)\left(x - \overline{z}\right) = x^2 - 2 \cdot \operatorname{Re}(z) \cdot x + |z|^2 \,.$$

Insbesondere ist das Polynom $p(x) = (x - z)\left(x - \overline{z}\right)$ reell.

Beweis:

$$p(x) = (x - z)\left(x - \overline{z}\right) = x^2 - x \cdot \overline{z} - z \cdot x + z \cdot \overline{z} = x^2 - \left(z + \overline{z}\right) \cdot x + z \cdot \overline{z} = x^2 - 2 \cdot \operatorname{Re}(z) \cdot x + |z|^2 \qquad \square$$

Fundamentalsatz der Algebra (ohne Beweis): Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen, d. h. jedes nichtkonstante komplexe Polynom hat (mindestens) eine komplexe Nullstelle.

Bemerkungen:

1. Also hat auch jedes nichtkonstante reelle Polynom (mindestens) eine komplexe Nullstelle.
2. Der Satz sagt nicht, wie man eine Nullstelle bestimmen kann.

Folgerung: Jedes nichtkonstante (reelle oder komplexe) Polynom lässt sich als Produkt von komplexen Linearfaktoren schreiben, d. h. für ein normiertes Polynom n-ten Grades

$$p(x) = x^n + \text{niedrigere Terme}$$

gilt

$$p(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n).$$

Diese Nullstellen können teilweise gleich sein.

Feststellung (Beweis siehe „Für Experten") : Hat ein reelles Polynom eine komplexe Nullstelle z, dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle des Polynoms.

Ein reelles Polynom kann man also immer folgendermaßen faktorisieren:

- Zu jeder reellen Nullstelle gehört ein reeller Linearfaktor.
- Ein Polynom ungeraden Grades hat immer eine reelle Nullstelle. Nach dem Abspalten des zugehörigen Linearfaktors bleibt ein Polynom geraden Grades übrig.
- Wenn dieses Polynom keine reelle Nullstelle hat, dann hat es zwei konjugiert komplexe Nullstellen. Das Produkt der beiden zugehörigen Linearfaktoren ist ein reelles quadratisches Polynom, das man abspalten kann.

Daraus folgt das

Ergebnis: Jedes nichtkonstante reelle Polynom lässt sich als ein Produkt von reellen Linearfaktoren und reellen quadratischen Termen schreiben, d. h. für ein normiertes Polynom

$$p(x) = x^n + \text{niedrigere Terme}$$

gilt

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots (x - x_r)(x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2) \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_k x + q_k).$$

Für Experten

Beweis der Feststellung: Für komplexe Zahlen $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cdot i)$ und $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot i)$ gilt

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot i).$$

Beweis:

Ohne Begründung: Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cdot i) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot i) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot \left[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + (\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2) \cdot i \right] \\ &= r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot i) \end{aligned}$$

□

<u>Feststellung:</u> Eine Gleichung der Form

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (b, c, d \in \mathbb{R})$$

wird durch die Substitution

$$z = x + \frac{b}{3} \quad \text{bzw.} \quad x = z - \frac{b}{3}$$

in eine Gleichung der Form

$$z^3 + pz + q = 0$$

überführt.

<u>Beweis:</u> Die Substitution ergibt

$$\begin{aligned}
\left(z - \frac{b}{3}\right)^3 + b \cdot \left(z - \frac{b}{3}\right)^2 + c \cdot \left(z - \frac{b}{3}\right) + d &= 0 \\
z^3 + 3 \cdot z^2 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right) + 3 \cdot z \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)^2 + \left(-\frac{b}{3}\right)^3 + b \cdot \left(z^2 - \frac{2}{3} zb + \frac{b^2}{9}\right) + cz - \frac{bc}{3} + d &= 0 \\
z^3 - bz^2 + \frac{b^2}{3} z - \frac{b^3}{27} + bz^2 - \frac{2}{3} b^2 z + \frac{b^3}{9} + cz - \frac{bc}{3} + d &= 0 \\
z^3 + \left(-\frac{b^2}{3} + c\right) \cdot z + \left(\frac{2}{27} b^3 - \frac{bc}{3}\right) + d &= 0
\end{aligned}$$

□

<u>Beweis der Feststellung:</u> Hat ein reelles Polynom eine komplexe Nullstelle z, dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle des Polynoms.

<u>Beweis</u> Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n.-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& p(z) = 0 & \\
\Leftrightarrow \quad & a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 & \\
\Leftrightarrow \quad & \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{0} & \\
\Leftrightarrow \quad & \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0 & \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \\
\Leftrightarrow \quad & \overline{a_n} \cdot \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} = 0 & \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \\
\Leftrightarrow \quad & a_n \cdot \overline{z^n} + a_{n-1} \cdot \overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \overline{z} + a_0 = 0 & \text{für } a \in \mathbb{R} \text{ ist } \overline{a} = a \\
\Leftrightarrow \quad & a_n \cdot \overline{z}^n + a_{n-1} \cdot \overline{z}^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \overline{z} + a_0 = 0 & \overline{z^n} = \overline{z}^n \\
\Leftrightarrow \quad & p(\overline{z}) = 0 &
\end{aligned}$$

□